CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

SOBRE EL NÚMERO DE LADOS SEGREGADOS EN POBLACIONES DE GRAN TAMAÑO Y FUNCIONALES EXPONENCIALES DE PROCESOS DE LÉVY

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

P R E S E N T A

AIRAM ASERET BLANCAS BENÍTEZ

DIRECTOR DE TESINA
Dr. VÍCTOR MANUEL RIVERO MERCADO

GUANAJUATO, GTO. AGOSTO DE 2010.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

SOBRE EL NÚMERO DE LADOS SEGREGADOS EN POBLACIONES DE GRAN TAMAÑO Y FUNCIONALES EXPONENCIALES DE PROCESOS DE LÉVY

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

P R E S E N T A

AIRAM ASERET BLANCAS BENÍTEZ

DIRECTOR DE TESINA
Dr. VÍCTOR MANUEL RIVERO MERCADO

JURADO INTEGRADO POR
Dr. VÍCTOR MANUEL PÉREZ ABREU CARRIÓN (CIMAT)
Dr. JUAN CARLOS PARDO MILLÁN (CIMAT)
Dr. VÍCTOR MANUEL RIVERO MERCADO (CIMAT)

Vo. Bo. DIRECTOR DE TESINA

GUANAJUATO, GTO. AGOSTO DE 2010.

Dedicatoria

A mi familia por ser mi mayor bendición.

Agradecimientos

A mis padres que son ejemplo de lucha y entrega.

A mi hermana Airamara por tener en cada momento las palabras precisas para mi.

A mis hermanos pequeños Analhí y Adamir, cómplices en muchas de mis alegrías.

Agradezco muy especialmente la paciencia y el tiempo que para la realización de este trabajo me dedicó mi asesor el Dr. Víctor Rivero, siendo él quien motivó e hizo posible la extensión de un intercambio académico, la experiencia que ha marcado mi desarrollo.

A mis amigos incondicionales Harold y Toño, con quienes viví momentos inolvidables a lo largo de estos dos años.

A mis profesores, ayudantes, compañeros de generación y todas aquellas personas que me brindaron su apoyo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. por el apoyo económico recibido.

Contenido

Introducción

Los procesos coalescentes fueron introducidos por Kingman, en ellos alternativamente se analizan las relaciones genealógicas de una población para determinar su dinámica. En la actualidad, forman parte fundamental de la genética de poblaciones, la filogeografía, la demografía histórica y la evolución porque permiten obtener genealogías de la constitución genética de un cromosoma, en forma más rápida y confiable. Además, en ellos es posible incorporar los diferentes factores que afectan la variación genética tales como selección, deriva genética, mutaciones, recombinaciones y migración, produciendo predicciones que pueden ser contrastadas con datos obtenidos de diferentes poblaciones.

El objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento asintótico de S_n, el número de mutaciones en una población de tamaño constante n que se modela por un proceso Λ-coalescente. Así como presentar y establecer ejemplos que muestran la relación que existe entre la variable aleatoria límite del promedio de mutaciones cuando n crece, S y funcionales exponenciales de procesos de Lévy.

Este material esta dirigido a estudiantes de nivel maestría del área de Probabilidad y Estadística interesados en la Teoría de Procesos Estocásticos.

En el Capítulo 1 se presentan las nociones básicas de la teoría de los procesos coalescentes, utilizando a [3] como referencia básica. Introducimos al lector en la teoría de las particiones aleatorias intercambiables de $\mathbb{N}$, un elemento fundamental porque en nuestro estudio cada bloque de una partición representa una familia de la población. Suponiendo que exactamente dos individuos se fusionan definimos los procesos n-coalescentes, a partir de los cuales probamos mediante el Teorema de Límites Proyectivos la existencia del coalescente de Kingman. Permitiendo la coalescencia de más de dos individuos construimos de forma análoga los procesos $\Lambda-$coalescentes también llamados como su dinámica lo sugiere, coalescentes con coalescencias múltiples. Cabe resaltar que incluimos una demostración autocontenida del Teorema de Pitman que da sentido al llamar Λ-coalescentes a esta familia de procesos.

El Capítulo 2 esta basado en [15]. Suponiendo que las mutaciones a lo largo del árbol genealógico de la población ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro r mostramos una recurrencia para el número de mutaciones en la población que a su vez nos permite establecer recursiones para funciones de S_n tales como la media, la varianza y la función generadora de probabilidades, siendo ésta última importante porque con ella obtenemos la transformada de Laplace que caracteriza a la ley de una variable aleatoria. Probamos que en el límite cuando n crece, $S_n/(nr)$ converge a una variable aleatoria límite S que está determinada unívocamente por una ecuación funcional estocástica (Teorema 3.1 de [15]). Debilitando las hipótesis de la medida Λ, más precisamente, permitiendo que algunos de los bloques del proceso sean singuletes al tiempo t, demostramos el resultado más importante de [15], el cual establece que S se puede escribir en ley como un funcional exponencial de un proceso de Lévy, $X = (X_t, t \geq 0)$. Más precisamente X

es un subordinador que determina el número de singuletes al tiempo t. Las afirmaciones hechas en términos del modelo son un complemento a [15] y se deducen de [16].

Finalmente y debido a que buscamos que el presente escrito sea autocontenido incluimos un capítulo con los resultados más importantes de funcionales exponenciales de procesos de Lévy.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo definimos el proceso coalescente de Kingman, así como el proceso Λ-coalescente. Iniciamos estudiando las particiones de $\mathbb{N}$ porque éstas son el espacio de estados de los procesos coalescentes que no son más que cadenas de Markov a tiempo contiuo.

1.1 Particiones aleatorias

A continuación presentamos una introducción a la teoría de las particiones intercambiables desarrollada esencialmente por Kingman y bloque fundamental en la teoría de los procesos coalescentes. Incluimos el Teorema de Correspondencia de Kingman que resulta importante porque nos permite considerar a una partición aleatoria como un objeto discreto con valores en $\mathcal{P}_\infty$ o alternativamente como un objeto continuo definido en $\mathcal{S}^\downarrow$.

1.1.1 Particiones de masa

En este apartado introducimos las nociones elementales de las particiones de una masa unitaria.

Particiones de una masa unitaria

Una partición de algún conjunto E es una colección de subconjuntos disjuntos cuya unión es E. En particular, una partición de $n \in \mathbb{N}$ es una familia finita de enteros positivos $p_1, ..., p_k$ tales que $p_1 + \cdots + p_k = n$. Suponemos que ésta familia no es ordenada, de manera que $\{2, 3\}$ y $\{3, 2\}$ representan una partición de 5. En la práctica es conveniente enumerar los elementos de una partición, pero como no estamos interesados en ningún orden en especial, por convención listamos los elementos de una partición en orden creciente.

Sea $\{p_1, ..., p_k\}$ una partición de n. Considerando $s_i = p_i/n$, $i = 1, ..., k$, $\{p_1, ..., p_k\}$ induce una partición $\{s_1, ..., s_k\}$ de 1. Haciendo que n tienda a infinito introducimos la siguiente noción.

Definición 1.1. *Una partición de masa es una sucesión numérica infinita*

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, ...)$$

tal que

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{\infty} s_i \leq 1.$$

Denotamos el espacio de las particiones de masa por $\mathcal{S}^{\downarrow}$.

Un elemento típico $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{\downarrow}$ lo podemos pensar como una sucesión en orden creciente de las masas de los elementos de un universo de masa 1. Dado que la masa total de los elementos de dicha sucesión puede ser estrictamente menor que 1, definimos

$$s_0 := 1 - \sum_{i=1}^{\infty} s_i.$$

Imaginando que esta cantidad representa las partículas infinitesimales del universo llamamos a s_0 polvo. Una partición de masa $\mathbf{s}$ que no tiene polvo es conocida como propia, en caso contrario como impropia. Obviamente una partición de masa es propia cuando $s_0 = 0$. Así por ejemplo $\mathbf{s} = (0.5, 0, 0, ...)$ es una partición de masa impropia con polvo $s_0 = 0.5$.

Particiones de intervalos

Es bien sabido que todo subconjunto abierto $\mathcal{V}$ de $I := (0, 1)$ lo podemos descomponer en una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos. En este caso las masas s_i corresponden a las longitudes de los intervalos ordenadas de mayor a menor y el polvo es la longitud del complemento de $\mathcal{V}$.

Definición 1.2. *La colección de intervalos disjuntos que cubren a un conjunto abierto $\mathcal{V} \subseteq (0, 1)$ es llamada partición de intervalo. Por abuso de notación representamos a esta partición como $\mathcal{V}$. El espacio de las particiones de intervalos es representado por $\mathcal{P}_I$. Denotamos por $|\mathcal{V}|^{\downarrow}$ la sucesión ordenada de las longitudes de las componentes de la partición de intervalo. Cuando la partición de intervalo de $\mathcal{V}$ tiene un número finito de componentes completamos la sucesión $|\mathcal{V}|^{\downarrow}$ con una cantidad infinita de ceros para obtener una partición de masa.*

Recíprocamente dada una partición de masa $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{\downarrow}$ es claro que podemos construir una partición de intervalo $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_I$ con $|\mathcal{V}|^{\downarrow} = \mathbf{s}$. $\mathcal{V}$ es llamada la representación intervalo de $\mathbf{s}$. Notemos que $\mathcal{V}$ no es única.

La partición de Poisson Dirichlet

Supongamos que $N \geq 2$. Es claro que dado el simplejo de dimensión $(N - 1)$

$$\Delta_{N-1} := \left\{ x = (x_1, ..., x_N) : x_i \geq 0 \text{ para cada } i = 1, ..., N \text{ y } \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \right\}.$$

podemos obtener una partición de masa. Recordemos que para cada $\alpha_1, ..., \alpha_N > 0$ la distribución de Dirichlet de dimensión $(N - 1)$ con parámetro $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ es una medida de probabilidad sobre Δ_{N-1} con densidad

$$\frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_N)} x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_N^{\alpha_N - 1}, \quad (x_1, ..., x_N) \in \Delta_{N-1}$$

El caso especial en que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 1$ se conoce como la distribución uniforme de Δ_{N-1}.

Las particiones de masa inducidas por la familia de distribuciones de Dirichlet de dimensión $(N-1)$ son llamadas particiones de Dirichlet.

A continuación establecemos una representación de la distribución Dirichlet que involucra v.a.i. con la distribución Gamma.

Lema 1.3. *(i) Sean $\alpha_1, ..., \alpha_N, c$ constantes no-negativas. Si $\gamma_1, ..., \gamma_N$ son variables aleatorias Gamma con respectivos parámetros $(\alpha_1, c), ..., (\alpha_N, c)$ y $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_N$. Entonces la N-tupla*

$$(\gamma_1/\gamma, ..., \gamma_N/\gamma)$$

tiene una distribución de Dirichlet de dimensión $(N-1)$ con parámetros $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$, además es independiente de γ.

(ii) Sean $0 < V_1 < \cdots < V_{N-1} < 1$ los estadísticos de orden de una familia de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0,1]$. Entonces la N-tupla de los incrementos

$$(V_1, V_2 - V_1, ..., V_{N-1} - V_{N-2}, 1 - V_{N-1})$$

tiene una distribución uniforme sobre el simplejo Δ_{N-1}.

Prueba. La f.d.p. conjunta de $(\gamma_1, ..., \gamma_N)$ es

$$f(\gamma_1, ..., \gamma_N) = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_N)} \gamma_1^{\alpha_1 - 1} \cdots \gamma_N^{\alpha_N - 1} e^{-c(\gamma_1 + \cdots + \gamma_N)},$$

donde $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. Definiendo $X_i := \gamma_i/\gamma$, $i = 1, ..., N-1$, obtenemos que $\gamma_i = \gamma X_i$, $i = 1, ..., N-1$ y $\gamma_N = \gamma\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} X_i\right)$ donde el Jacobiano esta dado por

$$J\left(\frac{\gamma_1, ..., \gamma_N}{\gamma, X_1, ..., X_{N-1}}\right) = \begin{vmatrix} X_1 & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ X_2 & 0 & \gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N-1} & 0 & 0 & \cdots & \gamma \\ 1 - \sum_{i=1}^{N-1} X_i & -\gamma & -\gamma & \cdots & -\gamma \end{vmatrix} = \gamma^{N-1},$$

es decir, $dX_1 \cdots dX_N = d\gamma dX_1 \cdots dX_{N-1}$.

Entonces por el Teorema de Cambio de Variable, la f.d.p. de $(X_1, ..., X_{N-1}, \gamma)$ es

$$\begin{aligned} g(x_1, ..., x_{N-1}, \gamma) &= \gamma^{N-1} f(\gamma_1, ..., \gamma_{N-1}, \gamma) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_N)} x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_{N-1}^{\alpha_{N-1} - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} x_i\right)^{\alpha_N - 1} \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-c\gamma} \gamma^{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue (i) observando que $\gamma_N/\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} X_i$.

Para probar la segunda parte del Lema recordemos que la f.d.p. de $(V_1, ..., V_{N-1})$ es $(N-1)!$ sobre el conjunto

$$\{(v_1, ..., v_{N-1}) : 0 < v_1 < \cdots < v_{N-1} < 1\}.$$

Definiendo $X_i = V_i - V_{i-1}$, $i = 1, ..., N$ con $V_0 = 0$ y $V_N = 1$ se sigue del Teorema de Cambio de Variable que la f.d.p. de $X = (X_1, ..., X_{N-1})$ es también $(N-1)!$. Condicionando sobre X_N tenemos que la la f.d.p. buscada esta dada por

$$g(x_1, ..., x_{N-1}, x_N) = f(x_1, ..., x_{N-1}|\, x_N)h(x_N),$$

donde f y h son respectivamente las f.d.p. de $X|X_N$ y X_N. Dado que X es independiente de X_N, $f(x_1, ..., x_{N-1}|\, x_N)$ es la f.d.p. de $(X_1, ..., X_{N-1})$. Ahora observando que $1 - V_{N-1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} V_{N-1}$ tenemos que $h(x_N)$ es la f.d.p. de V_{N-1}. Por lo tanto $g(x_1, ..., x_{N-1}, x_N)$ es $(N-1)!$, es decir, la distribución de los incrementos de los estadísticos de orden $(V_1, ..., V_{N-1})$ es uniforme sobre Δ_{N-1}. ■

El resultado anterior nos permite unir dos elementos de una partición de masa, seleccionados aleatoria y uniformemente.

Corolario 1.4. *Suponga que $x = (x_1, ..., x_N)$ se distribuye uniformemente sobre el simplejo Δ_{N-1} con $N \geq 3$. Seleccionemos aleatoriamente sin reemplazo e independientemente de x los índices j y k de $\{1, ..., N\}$. Sea x' la sucesión con $N-1$ términos obtenida de x reemplazando x_j por $x_j + x_k$ y eliminando el término x_k. Entonces x' se distribuye uniformemente sobre el simplejo Δ_{N-2}.*

Prueba. Supongamos que $\mathcal{C}$ es el círculo unitario orientado y distribuyamos uniformemente sobre él v.a.i. $U_1, ..., U_N$ de modo que obtengamos N arcos. Denotemos como A_i el arco cuyo extremidad izquierda es U_i y como $|\cdot|$ su longitud.

Observemos que el hecho de que las U_i's sean independientes con distribución uniforme en $\mathcal{C}$ implica que sus estadísticos de orden también se distribuyan uniformemente sobre $\mathcal{C}$. Por la parte (ii) del Lema anterior del anterior esto implica que $x = (|A_1|, ..., |A_N|)$ sigue una distribución uniforme sobre Δ_{N-1}.

Ahora seleccionemos independientemente de las U_i's un índice k en $\{1, ..., N\}$. Sea j el índice de la extremidad derecha del arco A_k. Entonces de nuevo por la independencia de las U_i's, condicionalmente sobre k, j tiene una distribución uniforme sobre $\{1, ..., N\} \setminus k$. Además j es independiente de x. Uniendo los arcos A_j y A_k, $\mathcal{C}$ se divide ahora en $N-1$ arcos determinados por $N-1$ v.a.i. con distribución uniforme sobre Δ_{N-2}, a saber $U_1, ..., U_{k-1}, U_{k+1}, ..., U_N$. Finalmente por (ii) del Lema anterior, $x' = (|A_1|, ..., |A_{k-1}|, |A_{k+1}|, ..., |A_N|)$ tiene la distribución buscada. ■

1.1.2 Particiones aleatorias intercambiables

Consideremos el espacio (I, μ) con I el intervalo unitario y μ la medida de Lebesgue. Sea $\mathbf{s}$ la partición de masa inducida por la sucesión ordenada de las longitudes de las componentes de una partición de intervalo I. En este apartado construimos una partición aleatoria π de $\mathbb{N}$ a partir de una sucesión $\{U_n\}$ de v.a.i. con distribución uniforme sobre I y de la relación donde los índices i y j pertenecen a la misma clase de equivalencia si y solamente si los puntos U_i y U_j están en la misma componente de la partición de intervalo I. Probamos utilizando la ley fuerte de los grandes números que las masas de las componentes de la partición de intervalo generada por $\{U_n\}$ coinciden con las frecuencias asintóticas de los bloques de la partición. Inversamente, dada una partición de $\mathbb{N}$ no necesariamente existe una partición de masa ya que las frecuencias asintóticas pueden no estar bien definidas. Sin embargo, establecemos una biyección conocida como correspondencia de Kingman, entre las leyes de particiones aleatorias intercambiables de $\mathbb{N}$ y medidas de probabilidad sobre $\mathcal{S}^{\downarrow}$.

Algunas definiciones

Un bloque es un subconjunto $B \subseteq \mathbb{N}$. En particular denotamos $[k] := 1, 2, ..., k$. En esta misma dirección, $[\infty] := \mathbb{N}$.

Definición 1.5. *(i) Una partición de $B \subseteq \mathbb{N}$ es una colección contable $\pi = \{\pi_i\}$ de bloques disjuntos por pares tales que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_i = B$. Por convención listamos los bloques de una partición en orden creciente de su elemento mínimo, así*

$$\min \pi_i \leq \min \pi_j \quad \textit{para cada } i \leq j,$$

donde $\min \emptyset = \infty$.

(ii) Suponemos que $\mathcal{P}_B$ es el conjunto de las particiones de B. En particular, si $B = [k]$ para algún $k \in \bar{\mathbb{N}}$, escribimos simplemente $\mathcal{P}_k := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(iii) La cardinalidad del conjunto de bloques no vacíos de la partición π la denotamos como

$$|\pi| := \mathit{Card}\{i \in \mathbb{N} : \pi_i \neq \emptyset\} = \max\{i \in \mathbb{N} : \pi_i \neq \emptyset\}.$$

Sea $B' \subseteq B$ un subconjunto de algún bloque B y $\pi \in \mathcal{P}_B$. Denotamos por $\pi|_{B'}$ la restricción de π a B', es decir, $\pi|_{B'}$ es la partición de B' inducida por la sucesión de bloques $\{\pi_i \cap B'\}$. Esta restricción en las particiones nos permite introducir la noción de consistencia.

Definición 1.6. *Una sucesión $\pi^{[1]}, \pi^{[2]}, ...$ de particiones de $[1], [2], ...$ es llamada consistente si para cada entero $k' \leq k$, $\pi^{[k']}$ coincide con la restricción de $\pi^{[k]}$ a $[k']$.*

Es claro que si π es una partición de $\mathbb{N}$, entonces la sucesión de sus restricciones $\{\pi|_{[n]}\}$ es consistente, de hecho la conversa también es cierta.

Lema 1.7. *Una sucesión de particiones $\{\pi^{[n]} : \pi^{[n]} \in \mathcal{P}_n \quad y \quad n \in \mathbb{N}\}$ es consistente si y sólo si existe $\pi \in \mathcal{P}_\infty$ tal que $\pi|_{[n]} = \pi^{[n]}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, π esta unívocamente determinado por la sucesión $\{\pi^{[n]}, n \in \mathbb{N}\}$.*

Prueba. Sea $\{\pi^{[n]} : \pi^{[n]} \in \mathcal{P}_n \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de particiones consistente. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi^{[n]} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_i^{[n]},$$

donde $\{\pi_i^n : i \in \mathbb{N}\}$ es una colección de bloques disjuntos dos a dos. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $k' \leq k$

$$\pi_i^{[k]} \cap [k'] = \pi_i^{[k']}.$$

Definiendo,

$$\pi_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_i^{[n]}$$

se sigue que $\pi = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_i$ es una partición de $\mathbb{N}$ y por construcción $\pi|_{[n]} = \pi^{[n]}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Ahora definimos las frecuencias asintóticas de los bloques de modo que nos proporcionen una conexión entre $\mathcal{P}_\infty$ y el espacio de las particiones de masa $\mathcal{S}^\downarrow$.

Definición 1.8. *(i) Un bloque B tiene frecuencia asintótica si y solamente si el límite*

$$|B| := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Card(B \cap [n]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Card\{k \in B : k \leq n\}$$

existe.

(ii) Si cada bloque de una partición π tiene frecuencia asintótica, entonces π tiene frecuencia asintótica. Denotamos la frecuencia asintótica de π por $|\pi| = (|\pi_1|, ...)$ y la partición de masa obtenida por el ordenamiento decreciente de los elementos de $|\pi|$ como $|\pi|^\downarrow = (|\pi|_1^\downarrow, ...)$.

(iii) Una partición π tiene frecuencia asintótica propia si las frecuencia asintóticas de sus bloques son tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| = 1.$$

Teoría de Kingman

Una partición $\pi \in \mathcal{P}_\infty$ se identifica con una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$, considerando la relación donde $i \overset{\pi}{\sim} j$ si y sólo si i y j pertenecen al mismo bloque de π. Inversamente dada una relación de equivalencias sobre $\mathbb{N}$, $\sim$ podemos construir una partición $\pi \in \mathcal{P}_\infty$ asociando las clases de equivalencia generadas por $\sim$ con los bloques de π.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ una permutación de $[n]$ es una biyección de $\sigma : [n] \to [n]$. Mientras que para $n = \infty$ una permutación es una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma(k) = k$ cuando k es lo suficientemente grande, es decir, una permutación de $\mathbb{N}$ es una permutación con dominio $[k]$ finito.

Sea σ una permutación y π una partición, la relación

$$i \sim j \Leftrightarrow \sigma(i) \overset{\pi}{\sim} \sigma(j), \quad i, j = 1, ..., n$$

es una relación de equivalencia. Denotamos la partición generada por sus clases de equivalencia como $\sigma(\pi)$.

Definición 1.9. *Sea $n \in \bar{\mathbb{N}}$. Una partición π de $[n]$ es llamada intercambiable si para cada permutación σ de $[n]$, $\sigma(\pi)$ tiene la misma ley que π.*

Notemos que una partición aleatoria π de $\mathbb{N}$ es intercambiable si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ la restricción $\pi|_{[n]}$ es intercambiable.

Sea $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^\downarrow$ y $\mathcal{V}$ su partición de intervalo. Recordemos que esto significa que $\mathcal{V}$ es una colección de abiertos disjuntos de $(0,1)$ (componentes) cuyas longitudes listadas en orden creciente estan dadas por $\mathbf{s}$. Consideremos una sucesión $\{U_n\}$ de v.a.i. con distribución uniforme en $(0,1)$. Sea π la partición aleatoria de $\mathbb{N}$ generada por la relación de equivalencia donde

$$i \overset{\pi}{\sim} j \Leftrightarrow i = j \text{ ó } (U_i \text{ y } U_j \text{ pertenecen a la misma componenete intervalo de } \mathcal{V}). \qquad (1.1)$$

Definimos así la relación de equivalencia porque cuando $\mathcal{V}$ tiene medida de Lebesgue estrictamente menor a 1 existen $U_i's$ que no pertenecen a alguna de las componentes de $\mathcal{V}$. En este caso los índices de esos $U_i's$ determinan los singuletes de π.

La partición π es llamada partición “paint-box” generada por $\mathbf{s}$. Su nombre viene de considererar que los índices de los $U_i's$ que pertenecen a la misma componenete de $\mathcal{V}$ son colocados en una caja pintada de un color específico. Mientras que los índices asociados a las $U_i's$ que no perteneces a alguna de las componentes de $\mathcal{V}$ son depositados en diferentes cajas a las que no es posible asignarles un color.

Lema 1.10. *La partición “paint-box” generada por $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{\downarrow}$ es una partición aleatoria intercambiable con ley ρ_s, independiente de la elección de la representación intervalo $\mathcal{V}$ de $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{\downarrow}$.*

Prueba. Sea σ una permutación de $\mathbb{N}$. Notemos que la independencia de las $U_i's$ implica que las $U'_{\sigma(i)}s$ sean v.a.i. con distribución uniforme en $(0,1)$. Luego tenemos la igualdad en ley de π y $\sigma(\pi)$ porque $\sigma(\pi)$ esta determinada por la relación de equivalencia

$$i \overset{\sigma(\pi)}{\sim} j \Leftrightarrow i = j \text{ ó } (U_{\sigma(\pi)} \text{ y } U_{\sigma(\pi)} \text{ pertenecen a la misma componenete intervalo de } \mathcal{V}).$$

y π por la relación (1.1).

Supongamos que $\mathcal{V}'$ es otra representación intervalo de $\mathbf{s}$. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función medible que preserva la medida de Lebesgue tal que las imagenes de las componentes intervalo de $\mathcal{V}$ son las componentes intervalo de $\mathcal{V}'$. Entonces $i \overset{\pi}{\sim} j \Leftrightarrow i = j$ ó $(f(U_i)$ y $f(U_j)$ pertenecen a la misma componenete intervalo de $\mathcal{V}')$, que es justamente lo que buscabamos probar ya que por construcción $f(U_n)$ tiene una distribución uniforme en $[0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

El Lema anterior nos proporciona una forma equivalente de generar una partición “paint-box” a partir de un elemento $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{\downarrow}$. Supongamos que F es una función de distribución sobre $\mathbb{R}$ cuyos átomos tienen masas en orden creciente dadas por $\mathbf{s}$. Sea $\{\xi_n\}$ una sucesión de v.a.i. con distribución F y π una partición aleatoria de $\mathbb{N}$ tal que i y j pertenecen al mismo bloque si y solamente si $\xi_i = \xi_j$. En consecuencia π tiene la distribucin de la partición “paint-box” ya que por el Teorema de la Transformada Integral la sucesión $\{\xi_n\}$ puede ser vista en ley como $\{F^{-1}(U_n)\}$.

Ahora veamos algunas propiedades de la partición “paint-box”.

Proposición 1.11. *Sea π la partición “paint-box” generada por la partición de masa $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{\downarrow}$. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(i) *La partición “paint-box” π tiene frecuencias asintóticas. Más precisamente, $|\pi|^{\downarrow} = \mathbf{s}$*

(ii) *Si un bloque de π tiene frecuencia asintótica cero, entonces es un singulete ó es vacío c.s.*

(iii) *Más precisamente, algunos bloques de π son reducidos a singuletes si y sólo si $\mathbf{s}$ es impropia, en este caso el conjunto de singuletes, $\pi_0 := \{i \in \mathbb{N} : i \text{ es un singulete de } \pi\}$ tiene frecuencias asintóticas dadas por $|\pi_0| = s_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} s_i$ c.s.*

Prueba. Gracias al Lema anterior la ley de π es independiente de la elección de la representación intervalo de $\mathcal{V}$. Entonces sin pérdida de generalidad suponemos que sus componentes son $V_k = \left(\sum_{i=0}^{k-1} s_i, \sum_{i=0}^{k} s_i\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. Definamos $V_0 = (0, s_0)$ y

$$I(u) = \inf\left\{n : \sum_{i=0}^{n} s_i > u\right\}.$$

Luego (1.1) es equivalente a

$$i \stackrel{\pi}{\sim} j \Leftrightarrow i = j \text{ ó } I(U_i) = I(U_j) > 0,$$

en consecuencia los bloques de π que no son singuletes están dados para cada $i \in \mathbb{N}$ por $\pi_i := \{j \in \mathbb{N} : U_j \in V_i\}$. Observando que V_i contine infinitos U_i's se sigue que π_i tiene infinitos miembros, así $|\pi_i| > 0$ y por lo tanto cuando la frecuencia asintótica de uno de los bloques de la partición "paint-box" es cero necesariamente éste es un singulete o es vacío. Además el conjunto $\pi_0 := \{i \in \mathbb{N} : i \text{ es un singulete de } \pi\}$ está determinado por V_0, de modo que $\pi_0 = \emptyset$ si y sólo si $s_0 = 0$, es decir si y sólo si $\mathbf{s}$ es propia.

Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$), $\left\{\mathbf{1}_{\{U_n \in V_k\}}\right\}$ es una sucesión de variables aleatorias Bernoulli de parámetro s_k y por la ley fuerte de los grandes números $|\pi_k| = s_k$ c.s. ■

El siguiente resultado establece la igualdad en ley entre una partición aleatoria intercambiable π y la partición "paint-box" generada por una de las posibles particiones de intervalo obtenida al considerar las frecuencias asintóticas de π. La demostración original dada por Kingman en [12] utliza la teoría de martingalas al igual que la del Teorema de Finetti (ver [9] o [1]), el cual utilizamos en la prueba que presentamos. Éste afirma que dada una sucesión intercambiable de v.a. $\{\xi_n\}$, la sucesión de distribuciones empíricas

$$\mu_n(dx) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\xi_i}(dx)$$

converge debilmente en el límite cuando $n \to \infty$ a una medida de probabilida $\mu(dx)$ c.s. Más aún, condicionalmente sobre μ, $\{\xi_n\}$ es una sucesión de v.a.i. con ley μ.

Teorema 1.12 (Correspondencia de Kingman)**.** *Sea π una partición aleatoria intercambiable de $\mathbb{N}$. Entonces π tiene frecuencias asintóticas c.s. Más aún, la ley de π puede ser expresada como una distribución mezcla*

$$\mathbb{P}(\pi \in \cdot) = \int_{s \in \mathcal{S}^{\downarrow}} \mathbb{P}\left(|\pi|^{\downarrow} \in ds\right) \rho_s(\cdot), \tag{1.2}$$

donde ρ_s es la ley de la partición "paint-box" generada por $\mathbf{s}$.

Prueba. Sea π una partición de $\mathbb{N}$. Una función $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b(i) = b(j)$ para cada $i, j \in \pi_k$ donde π_k es un bloque de π es llamado "mapeo de selección". Por ejemplo la función que asocia a cada bloque su elemento mínimo es un mapeo selección.

Supongamos que b es un mapeo selección y π una partición aleatoria intercambiable. Sea $\{U_n\}$ una sucesión de v.a.i. con distribución uniforme en $(0, 1)$ e indepedientes de π y de b.

Definamos $\xi_i = U_{b(i)}$. Entonces la ley de la sucesión $\{\xi_n\}$ no depende de b ya que las $U_i's$ son v.a.i.i.d. Veamos ahora que $\{\xi_n\}$ es intercambiable, como un primer paso observemos que

$$\xi_{\sigma(i)} = U_{b(\sigma(i))} = U'_{b'(i)}$$

donde σ es una permutación de $\mathbb{N}$, $U'_i = U_{\sigma(i)}$ y $b' = \sigma^{-1} \circ b \circ \sigma$. Ahora b' es un mapeo selección de $\sigma(\pi)$ pues los bloques de $\sigma(\pi)$ son las imagenes de los bloques de π bajo σ^{-1} y b es un mapeo selección. Además $\{U'_n\}$ es una sucesión de v.a.i. con distribución uniforme en $(0,1)$, que a su vez es independiente de $\sigma(\pi)$ y de b'. Luego tenemos la igualdad en ley de $((U'_n), \sigma(\pi))$ y $((U_n), \pi)$ porque π es intercambiable e independiente de las $U'_i s$. Así $\{\xi_n\}$ es intercambiable y por el Teorema de Finetti, existe una medida de probabilidad $\mu := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\xi_i}$ tal que condicionalmente sobre μ, $\{\xi_n\}$ es una sucesión de v.a.i. con ley μ.

Notemos que dada la sucesión $\{\xi_n\}$ podemos obtener la partición π ya que los $\xi'_i s$ con el mismo índice determinan un bloque de π.

Sea q la inversa generalizada de μ, es decir

$$q(x) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mu(y) \geq x\}.$$

Definiendo la partición de intervalo $\mathcal{V}$ como

$$\mathcal{V} := \{x \in (0,1) : \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } q(x) = q(y) \text{ cuando } |\, y - x| < \epsilon\},$$

se sigue que las longitudes de las componentes de $\mathcal{V}$ son las masas de los átomos de μ. Ahora considerando una sucesión $\{V_n\}$ de v.a.a.i. que siguen una distribución uniforme en $(0,1)$, el Teorema de la Transformada Integral implica que la sucesión $\{q(V_n)\}$ tiene la misma ley que la sucesión $\{\xi_n\}$ condicionalmente a μ. Además, i y j pertenecen al mismo bloque de π si y solamente si V_i y V_j pertenecen a la misma componente la partición de intervalo $\mathcal{V}$. En consecuencia, condicionalmente a μ, π tiene la distribución de la partición "paint-box" generada por $\mathcal{V}$. Por ley de probabilidad total se tiene (1.2). ■

1.2 El coalescente de Kingman

1.2.1 Genealogía de la población

Supongamos que tenemos una población de tamaño constante n haploide, es decir, cada individuo tiene exactamente un padre en la generación previa. Seguimos las líneas ancestrales de la población hacia atrás suponiendo que el tiempo se mueve en esta dirección, es claro que éstas líneas coalescen ya que cuando distintos individuos tienen el mismo ancestro en la generación correspondiente al tiempo t, ellos necesariamente tienen el mismo ancestro en la generación asociada al tiempo $t' \geq t$. (Ver figura 1.1)

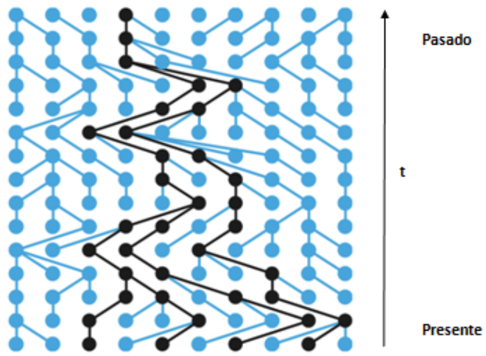

Figura 1.1: Genealogía de una población

Consideremos que $\pi(t) \in \mathcal{P}_n$, asociando con cada uno de sus bloques una sub-familia de la población se sigue que $\pi(t+s)$ puede ser obtenida de $\pi(t)$ por la coalescencia de sus bloques.

Para iniciar con el estudio matemático de este fenómeno, consideramos el modelo de Wright-Fisher, uno de los más simples de la evolución de la población, introducido alrededor de 1930 y donde se supone que el tiempo es discreto, el tamaño de la población es una constante n, las generaciones no se traslapan y además cada individuo de la generación $k+1$ elige su padre de la generación k uniformemente e independientemente de los otros individuos.

En particular supongamos que el número de hijos de un individuo típico se distribuye como una v.a. binomial de parámetros $(n, 1/n)$. Entonces la probabilidad de que dos individuos de una generación tengan el mismo padre en la generación previa es $1/n$. Además por la independencia de las generaciones, la probabilidad de que las líneas ancestrales de estos dos individuos permanezcan distintas durante al menos k generaciones es $(1-1/n)^k$. En consecuencia, el tiempo de coalescencia de sus líneas ancestrales, es decir, el tiempo para encontrar el ancestro común más reciente tiene una distribución geométrica con media n. En general si seleccionamos $l \leq n$ individuos de una misma generación estos tienen distintos padres en la generación anterior si el j-ésimo individuo elige su padre de un total de $n-j+1$ individuos. Entonces la probabilidad de que no exista una coalescencia en la generación anterior es $(1-1/n)\cdots(1-(l-1)/n)$. Más aún, la probabilidad de que no exista una coalescencia de las líneas ancestrales de estos l individuos antes de la generación k es $(1-1/n)^k \cdots (1-(l-1)/n)^k$.

Supongamos ahora que a cada unidad de tiempo le corresponde una generación. Haciendo que $n \to \infty$, la probabilidad de que las líneas ancestrales correspondientes a l individuos de la misma generación permanezcan distintas al menos hasta el tiempo t (i.e. durante al menos $k = \lfloor nt \rfloor$ generaciones) converge cuando $n \to \infty$ a

$$e^{-t(1+\cdots+(l-1))} = \exp(-tl(l-1)/2).$$

Por lo tanto el tiempo de la primera coalescencia para las líneas ancestrales de l distintos individuos converge en distribución a una variable exponencial con parámetro $l(l-1)/2$, es decir, converge al mínimo de $l(l-1)/2$ variables aleatorias exponenciales de parámetro 1.

Finalmente notemos que existen $l(l-1)/2$ formas de que las líneas ancestrales correspondientes a l distintos individuos se fusionen. Esta observación fue hecha por Kingman introduciendo un importante proceso de Markov sobre el espacio de las particiones de $\mathbb{N}$, el cual estudiamos en la siguiente sección.

1.2.2 Construcción del proceso coalescente de Kingman

Sean π y π' dos particiones de algún conjunto $E \subseteq \mathbb{N}$. Entonces π' puede ser obtenida de π por la coalescencia de (exactamente) dos de sus bloques (no vacíos) siempre que existan $1 \leq i < j$ tales que π_i,$\pi_j \neq \emptyset$, $\pi'_i = \pi_i \cup \pi_j$, y para todo $n' \neq i$, exista algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}$ tal que $\pi'_{n'} = \pi_n$.

Consideremos para cada $n > 0$ fijo, la cadena de Markov a tiempo continuo $\Pi^{[n]} = (\Pi^{[n]}(t), t \geq 0)$ con espacio de estados $\mathcal{P}_n$ introducida en el apartado anterior y conocida como n-coalescente. Analizando su dinámica observamos que la partición trivial $\mathbf{1}_{[n]} = ([n], \emptyset, ...)$ es un estado absorbente. Más aún, la tasa de salto de π a π' es uno cuando π' es obtenida de π por la coalescencia de dos de sus bloques y cero en otro caso. En consecuencia, cuando el estado inicial de $\Pi^{[n]}$ es alguna partición π con $|\pi| = k \geq 2$, la cadena permance en π durante un tiempo exponencial de parámetro $k(k-1)/2$, para luego saltar a una de las $k(k-1)/2$ particiones que pueden ser obtenidas de π por la coalescencia de dos de sus bloques seleccionados aleatoria y uniformemente. Sin pérdida de generalidad suponemos que el estado inicial de $\Pi^{[n]}$ es la partición trivial de los singuletes, pues cualquier partición puede ser reducida a ésta. Equivalentemente describimos la dinámica de $\Pi^{[n]}$ observando que el número de bloques no-vacíos,

$$|\Pi^{[n]}| = \left(|\Pi^{[n]}(t)|, t \geq 0\right)$$

es un proceso de puras muertes, es decir, $|\Pi^{[n]}|$ es una cadena de Markov a tiempo continuo sobre $\mathbb{N}$ en la cual solamente son permitidas transiciones de k a $k-1$, más precisamente, la tasa de muerte en el nivel k es $k(k-1)/2$.

Para cada $m = 1, ..., n$, sea $K^{[n]}(m)$ la partición de $[n]$ con m bloques no-vacíos que es obtenida después de $n - m + 1$ coalescencias en el proceso $\Pi^{[n]}$. En particular, $K^{[n]}(n)$ es la partición de los singuletes y $K^{[n]}(1)$ es la partición trivial $\mathbf{1}_{[n]}$. Notando que la sucesión $(K^{[n]}(n), K^{[n]}(n-1), ..., K^{[n]}(1))$ determina los estados visitados por $\Pi^{[n]}$ se sigue que $K^{[n]}$ es una cadena de Markov indexada por $\{n, n-1, ..., 1\}$, lo cual implica que

$$\mathbb{P}\left(K^{[n]}(k) = \cdot \,|K^{[n]}(n), ..., K^{[n]}(k+1)\right) = \mathbb{P}\left(K^{[n]}(k) = \cdot \,|K^{[n]}(k+1)\right).$$

Además, $K^{[n]}$ es independiente del proceso de muertes $\left|\Pi^{[n]}\right|$ y sus probabilidades de transición están dadas por una distribución uniforme sobre el conjunto de las $|\pi|(|\pi|-1)/2$ particiones que pueden ser obtenidas de π por la coalescencia de dos de sus bloques.

Por definición tenemos que

$$\Pi^{[n]}(t) = K^{[n]}(|\Pi^{[n]}(t)|), \quad t \geq 0.$$

El siguiente resultado nos permite calcular explícitamente la distribución unidimensional de $K^{[n]}$.

Proposición 1.13. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $(B_1, ..., B_k, \emptyset, ...)$ una partición de $[n]$ con $B_k \neq \emptyset$. Entonces,*

$$\mathbb{P}(K^{[n]}(k) = (B_1, ..., B_k, \emptyset, ...)) = \frac{(n-k)!k!(k-1)!}{n!(n-1)!} \prod_{i=1}^{k} |B_i|!$$

Observe que esta fórmula demuestra que las particiones de $K^{[n]}(k)$ son intercambiables.

Prueba. La prueba es por inducción hacia atrás sobre el número de bloques k. El caso en el que $k = n$ corresponde a la partición trivial de los singuletes, así que obviamente la afirmación se cumple.

Por la ley de Probabilidad Total y el hecho de que cada transición ocurre con probabilidad $\frac{2}{k(k-1)}$

$$\mathbb{P}(K^{[n]}(k-1) = \eta) = \frac{2}{k(k-1)} \sum \mathbb{P}(K^{[n]}(k) = \xi), \tag{1.3}$$

donde la suma es sobre el conjuntos de las particiones $K^{[n]}(k)$ que por la coalescencia de dos de sus bloques se obtiene η.

Sea $|\eta| = (|B_1|, ..., |B_{k-1}|, 0, ..., 0)$ la cardinalidad de η. Entonces para algún $i = 1, ..., k-1$ y algún $l = 1, ..., |B_i| - 1$,

$$|\xi| = (|B_1|, ..., |B_{i-1}|, l, |B_i| - l, ..., |B_{k-1}|, 0, ...0).$$

Debido a que no estamos interesados en el orden de los elementos que conforman un bloque, para cada $1 \leq l < b$ existen $\frac{1}{2}\binom{b}{l}$ formas de dividir un bloque de tamaño b en dos bloques de tamaños l y $b - l$. Luego aplicando la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K^{[n]}(k-1) = \eta) &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{|B_i|-1} \frac{2}{k(k-1)} \frac{(n-k)!k!(k-1)!}{n!(n-1)!} \\
&\qquad \times |B_1|! \cdots |B_{i-1}|!\, l!\, (|B_i| - l)! \cdots |B_{k-1}|! \frac{1}{2} \binom{|B_i|}{l} \\
&= \frac{(n-k)!k!(k-1)!}{n!(n-1)!} |B_1|! \cdots |B_{k-1}|! \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{|B_i|-1} 1,
\end{aligned}$$

lo cual prueba lo que buscabamos ya que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{|B_i|-1} 1 = \sum_{i=1}^{k-1} (|B_i| - 1) = n - (k-1).$$

■

Enseguida probamos que el n-coalescente es consistente, esto significa que su restricción a $[m]$ con $2 \leq m < n$ es un m-coalescente. Esta propiedad es importante porque nos permite aplicar el Teorema de Límites Proyectivos (ver [11]) para garantizar la existencia de un proceso coalescente definido en $\mathcal{P}_\infty$.

Lema 1.14. *Para cada $n \geq 2$, la restricción $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ del n-coalescente a $[n-1]$ es un $(n-1)$-coalescente.*

Prueba. Consideremos la partición $\gamma \in \mathcal{P}_{n-1}$ y seleccionemos arbitrariamente una partición $\pi \in \mathcal{P}_n$ tal que $\gamma = \pi|_{[n-1]}$. Supongamos que el proceso n-coalescente $\Pi^{[n]}$ inicia en π y π_j es el bloque al que pertenece n.

Observemos que si π_j no es el singulete n, $\Pi^{[n]}(t)|_{[n-1]}$ se obtiene para cada $t \geq 0$ eliminando a n del bloque al que pertenece en la partición $\Pi^{[n]}(t)$. Así salvo el bloque en el que está n, los bloques de la partición $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ y $\Pi^{[n]}$ son los mismos para todo $t \geq 0$. Entonces una transición en $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ ocurre si y sólo si ocurre una transición en $\Pi^{[n]}$. Por lo tanto $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ es una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{P}_{n-1}$ y con tasa de transición $k(k-1)/2$ al nivel k, es decir, $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ es un $(n-1)$-coalescente.

Ahora supongamos que $\pi_j = \{n\}$. Sean τ_i el tiempo de espera necesario para tener la i-ésima coalescencia en $\Pi^{[n]}$. Entonces τ_i es una variable exponencial de parámetro $(k-i+1)(k-i)/2$ donde $|\pi| := k$. Sea A_i el evento en que $\{n\}$ no coalesce al tiempo τ_i y $\pi' := \Pi^{[n]}(\tau_1)$. Cuando A_1 no ocurre, n pertenece a un bloque $\Pi^{[n]}(\tau_1)$ el cual no es un singulete. Entonces por la primera parte de la prueba para todo $s \geq 0$, $\Pi^{[n]}(s+\tau_1)|_{[n-1]}$ es un $(n-1)$-coalescente que inicia en $\pi'|_{[n-1]}$. Observando que $\Pi(t)|_{[n-1]} = \pi$ para $0 \leq t < \tau_1 + \tau_2$ se sigue que $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ es en efecto un $(n-1)$-coalescente.

Condicionalmente a A_1 los bloques que coalescen al tiempo τ_1 en $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ son elegidos aleatoria y uniformemente de la partición $\pi|_{[n-1]}$, que consta de $k-1$ bloques. En consecuencia, $\pi'|_{[n-1]}$ tiene una distribución uniforme sobre el conjunto de las $(k-1)(k-2)/2$ particiones que pueden ser obtenidas de la coalescencia de dos de los bloques de $\pi|_{[n-1]}$, así la primera transición de $\Pi|_{[n-1]}$ ocurre del mismo modo que un $(n-1)$-coalescente. Ahora en la partición $\Pi^{[n]}(\tau_1)$, n es un singulete de modo que procediendo de un modo similar analizamos el evento complemento de A_2 concluyendo que $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ es un $(n-1)$-coalescente. Bajo A_2 la segunda transición de $\Pi|_{[n-1]}$ es la de un $(n-1)$-coalescente, continuando así concluimos que las transiciones de $\Pi^{[n]}|_{[n-1]}$ son exactamente las transiciones de un $(n-1)$-coalescente y por lo tanto el proceso que buscabamos.

■

Sea μ_n la ley del proceso n-coalescente, es decir, μ_n es una medida de probabilidad sobre $\mathbf{D}([0,\infty), \mathcal{P}_n)$, el espacio de las trayectorias càdlàg con valores en $\mathcal{P}_n$. Dado que para $1 < m < n$ $\Pi^n|_m$ es un proceso coalescente, $\mu_n|_{\mathbf{D}([0,\infty),\mathcal{P}_m)}$ es la ley de un m-coalescente. Esto implica que la sucesión de medidas μ_n es consistente, luego por el Teorema de Lmites Proyectivos existe una única medida de probabilidad μ_∞ sobre $\mathbf{D}([0,\infty), \mathcal{P}_\infty)$ tal que la restricción de μ_∞ a $\mathbf{D}([0,\infty), \mathcal{P}_n)$, es μ_n. El proceso de trayectorias càdlàg con valores en $\mathcal{P}_\infty$ bajo la ley μ_∞ es el llamado proceso coalescente de Kingman. Para más detalles sobre esta construcción ver [3].

Definición 1.15. *Existe un único proceso (en ley) el cual denotamos por $\Pi^K = (\Pi^K(t), t \geq 0)$ con valores en $\mathcal{P}_\infty$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el proceso inducido por su restricción a $[n]$, $\Pi^K|_{[n]} = (\Pi^K|_{[n]}(t), t \geq 0)$ es un n-coalescente. El proceso Π^K es llamado coalescente de Kingman.*

A continuación presentamos una descripción de la evolución del coalescente de Kingman.

Teorema 1.16. *i) El proceso coalescente de Kingman regresa desde el infinito, esto significa que para cada $t > 0$ el número de bloques no vacíos de $\Pi^K(t)$ es finito c.s. Más precisamente $(|\Pi^K(t)|, t > 0)$ es un proceso de puras muertes con tasa de muerte $k(k-1)/2$ al nivel k.*

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $K(n)$ el estado de Π^K cuando $|\Pi^K| = n$. Entonces la sucesión de estados $(..., K(n+1), K(n), ..., K(1))$ tiene la propiedad de Markov y es independiente del proceso de muertes $|\Pi^K|$.

iii) Condicionalmente sobre $K(n+1)$, $K(n)$ tiene cdistribución uniforme sobre el conjunto de las $n(n+1)/2$ particiones de $\mathbb{N}$ que pueden ser obtenidas de $K(n+1)$ por la coalescencia de dos de sus bloques.

Prueba. Para cada $\pi \in \mathcal{P}_\infty$ es claro que

$$|\,\pi| = \lim_{n\to\infty} |\,\pi||_{[n]}. \tag{1.4}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Recordando que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|\Pi^K|_{[n]}|$ es un proceso de muertes con tasa de muerte $j(j-1)/2$ al nivel j, es claro que el evento $\{|\Pi^K|_{[n]}(t)| \geq k\}$ ocurre si y solamente si hasta el tiempo t han ocurrido a lo más $n-k$ muertes. Ahora observando que el tiempo entre una transición del estado $n-j$ a $n-j-1$ es exponencial de parámetro $(n-j)(n-j-1)/2$ se sigue

$$\mathbb{P}\left(|\Pi^K|_{[n]}(t)| \geq k\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{2}{j(j-1)}\mathbf{e}_j > t\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{2}{j(j-1)}\mathbf{e}_j > t\right),$$

donde $\{\mathbf{e_j}\}$ es una sucesión de v.a.i. con distribución exponencial de parámetro 1. Por la continuidad de una medida de probabilidad y ya que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{2}{j(j-1)}\mathbf{e}_j = 0,$$

se tiene la primera afirmación de (i), haciendo que $k \to \infty$. La segunda se sigue de (1.4) y el hecho de que la restricción a $[n]$ de $(|\Pi^K(t)|, t > 0)$ es un proceso de puras muertes con tasa de muerte $k(k-1)/2$ al nivel k. Así mismo para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada entero fijo k

$$K^{[n]}(j) = K|_{[n]}(j), \quad j = 1, ..., k,$$

donde $K^{[n]}(\cdot)$ es la sucesión de estados del n-coalescente $\Pi^K|_{[n]}$. Luego las propiedades de la sucesión de estados de un n-coalescente son heredadas a la sucesión de estados del coalescente de Kingman y por lo tanto tenemos (ii) y (iii). ■

1.2.3 La representación intervalo del coalescente de Kingman

El propósito ahora es construir el coalescente de Kingman a partir de la conexión establecida en el corolario 1.4 entre la familia de distribuciones uniformes sobre el simplejo Δ_{n-1} y el proceso de coalescencias.

Sean $\{U_n\}$ y $\{U'_n\}$ sucesiones de v.a.i. con distribución uniforme en $(0,1)$. Definamos $\mathcal{V}(1) := (0,1)$ y para $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{V}(n+1) = (0,1) \setminus \{U'_1, ..., U'_n\}.$$

Dado que $\mathcal{V}(n)$ es el resultado de la coalescencia de dos componentes de longitud no cero de la partición de intervalo $\mathcal{V}(n+1)$ elegidas aleatoria y uniformemente de las $n+1$, $|\mathcal{V}(n)|^{\downarrow}$ tiene una distribución uniforme en $n(n+1)/2$. Más aún,

$$(..., |\mathcal{V}(n+1)|^{\downarrow}, |\mathcal{V}(n)|^{\downarrow}, ..., |\mathcal{V}(1)|^{\downarrow})$$

tiene la propiedad de Markov.

Sea $K'(n)$ la partición "paintbox" generada por la partición de intervalo $\mathcal{V}(n)$ y la sucesión $\{U_n\}$. Luego i y j pertenecen al mismo bloque de $K'(n)$ si y sólo si las variables U_i y U_j pertenecen a la misma componente de la partición de intervalo $\mathcal{V}(n)$. Por lo tanto $(..., K'(n+1), K'(n), ..., K'(1))$ es una cadena de Markov con las mismas probabilidades de transición que la sucesión de estados del coalescente de Kingman $K(\cdot)$. Así resta verificar la igualdad en ley de $K(n)$ y $K'(n)$.

Sea $(D(t), t > 0)$ el proceso de muertes asociado a $(|\Pi^K(t)|, t > 0)$. Entonces su tasa de muerte es $k(k-1)/2$ cuando $D(t) = k$, $k \in \mathbb{N}$. Definamos $\Pi'(t) = K'(D(t))$ para cada $t > 0$ y supongamos que $\Pi'(0)$ es la partición trivial de los singuletes.

Proposición 1.17. *El proceso* $(\Pi'(t), t \geq 0)$ *antes construido es una versión del coalescente de Kingman.*

Prueba. Por construcción el proceso $(\Pi'(t), t \geq 0)$ tiene la propiedad de Markov y sus probabilidades de transición son exactamente las del coalescente de Kingman, entonces sólo resta verificar que tiene la misma distribución unidimensional que Π^K.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea
$$T(n) = inf\{t > 0 : D(t) = n\}, \tag{1.5}$$
el primer tiempo de llegada al nivel n del proceso D. Dado que la partición formada por un sólo bloque es un estado absorbente de Π^K,

$$\lim_{n\to\infty} T(n) = 0 \quad c.s.$$

Definimos para cada $t \geq 0$ una variable $\Gamma^{[n]}(t)$ con valores en $\mathcal{P}_n$ tal que i y j pertenecen al mismo bloque de la partición $\Gamma^{[n]}(t)$ si y sólo si los bloques $K'_i(n) = \Pi'_i(T(n))$ y $K'_j(n) = \Pi'_j(T(n))$ son parte del mismo bloque de la partición $\Pi'(T(n) + t)$. Entonces $\Gamma^{[n]}(\cdot)$ es un proceso n-coalescente ya que $(K'(n), ..., K'(1))$ es una cadena de Markov con las mismas probabilidades de transición que la sucesión de estados del n-coalescente y $\{D(T(n) + t), t \geq 0\}$ es un proceso de muertes que inicia en n con tasa de muertes $j(j-1)/2$ al nivel $j \in \mathbb{N}$ independiente de de la sucesión $K'(\cdot)$.

Por construcción para cada $k \leq n$

$$\Gamma^{[n]}|_{[k]}(t) = \Pi'|_{[k]}(T(n) + t), \quad t \geq 0.$$

Lo cual implica que $\Pi'|_{[k]}(T(n) + t)$ es un $k-$coalescente ya que por el Lema 1.14, $\Gamma^{[n]}|_{[k]}(t)$ lo es. Haciendo que $n \to \infty$ se tiene lo que buscamos por (1.5).

■

1.3 Λ-coalescentes

En esta sección continuamos con el estudio de la dinámica del árbol genealógico de una población de tamaño n con las características antes consideradas pero permitiendo la coalescencia de más de dos individuos, es decir, suponemos que en una generación k (≥ 2) individuos pueden tener el mismo padre. Adicionando esta hipótesis obtenemos una nueva familia de procesos coalescentes, los llamados Λ-coalescentes o como su dinámica lo sugiere procesos con coalescencias múltiples.

1.3.1 Definición y construcción

Sea $R^{[m+1]}$ una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{P}_{m+1}$ cuyas transiciones ocurren de particiones ξ con n bloques a particiones η con k bloques tales que $\xi \subset \eta$, a una tasa $\lambda_{n,n-k+1}$. Donde $\xi \subset \eta$ significa que η es obtenida por la coalescencia de $n-k+1$ bloques de ξ.

Supongamos que al tiempo t el proceso $R^{[m+1]}$ tiene n bloques. Similarmente que para el $(m+1)$-coalescente con coalescencias binarias tenemos que cuando $m+1$ no es un singulete las transiciones de $R^{[m+1]}|_{[m]}$ son exactamente las transiciones de $R^{[m+1]}$. Así el número de bloques que se fusionan en $R^{[m+1]}$ y en su restricción a $[m]$ es el mismo, en consecuencia $\lambda_{nk} = \lambda_{n+1,k}$.

Si $m+1$ es uno de los bloques de la partición $R^{[m+1]}(t)$ definimos el evento en que el bloque $m+1$ está involucrado en la siguiente coalescencia del proceso $R^{[m+1]}$ como A. Observemos que si A no ocurre y en $R^{[m+1]}$ se da una coalescencia de k bloques entonces en su restricción a $[m]$ también tenemos la coalescencia de k bloques, es decir, $\lambda_{nk} = \lambda_{n+1,k}$. Por otro lado condicionalmente a que A ocurra, la coalescencia de $k+1$ bloques en $R^{[m+1]}$ implica la coalescencia de k bloques en su restricción a $[m]$. Entonces $\lambda_{nk} = \lambda_{n+1,k+1}$.

Por lo tanto, $R^{[m+1]}|_{[m]}$ es un m-coalescente con coalescencias múltiples si y solamente si sus tasas de transición satisfacen

$$\lambda_{n,k} = \lambda_{n+1,k} + \lambda_{n+1,k+1}, \quad 2 \leq k \leq n. \tag{1.6}$$

Observemos que la recursión anterior además de establecer la consistencia de $R^{[m]}$ determina si en la coalescencia de k bloques en $R^{[m]}$ interviene el singulete $m+1$.

De nuevo gracias al Teorema de Límites Proyectivos y el Lema 1.7 existe (en ley) un único proceso de Markov $(R_t, t \geq 0)$ con valores en $\mathcal{P}_\infty$ tal que su restricción a $\mathcal{P}_{[m]}$ tiene la ley de un m-coalescente con coalescencias múltiples.

Definición 1.18. *El proceso $(R_t, t \geq 0)$ es un Λ-coalescente o proceso con coalescencias múltiples.*

Resulta claro el por qué llamar a $(R_t, t \geq 0)$, proceso con coalescencias múltiples. El nombrarlo Λ-coalescente viene del siguiente resultado debido a Pitman.

Teorema 1.19. *Sea R un proceso con coalescencias múltiples con tasas de transición dadas por $(\lambda_{n,k})_{2\leq k\leq n}$. Entonces existe una medida finita Λ sobre el intervalo $[0,1]$ tal que*

$$\lambda_{n,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{n-k}\Lambda(dx), \quad 2 \leq k \leq n. \tag{1.7}$$

La medida Λ caracteriza de forma única la ley de R.

Prueba. Definamos $\mu_n := \lambda_{n+2,n+2}$ y probemos que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión completamente monótona, es decir,

$$(-1)^n \Delta^n \mu_k \geq 0, \quad n = 0, 1, 2...$$

donde $\Delta\mu_i = \mu_{i+1} - \mu_i$.

Por la propiedad de consistencia de R,

$$\lambda_{n,k} = \lambda_{n+1,k} + \lambda_{n+1,k+1}.$$

En particular,

$$\lambda_{n-1,n-1} = \lambda_{n,n-1} + \lambda_{n,n}, \tag{1.8}$$

lo cual implica que $\lambda_{n,n-1} = -\Delta\mu_{n-3}$.

Así mismo,

$$\lambda_{n-1,n-2} = \lambda_{n,n-2} + \lambda_{n,n-1}, \tag{1.9}$$

$$\lambda_{n-2,n-2} = \lambda_{n-1,n-2} + \lambda_{n-1,n-1}. \tag{1.10}$$

Sustituyendo en (1.9) las expresiones de $\lambda_{n-1,n-2}$ y $\lambda_{n,n-1}$ dadas respectivamente en (1.10) y (1.8),

$$\lambda_{n,n-2} = \Delta^2\mu_{n-4}.$$

Continuando con este proceso obtenemos para $2 \leq k \leq n$

$$\lambda_{n,n-k} = (-1)^k\Delta^k\mu_{n-(k+2)},$$

o equivalentemente,

$$\lambda_{n,k} = (-1)^{n-k}\Delta^{n-k}\mu_{k-2}. \tag{1.11}$$

Dado que $\lambda_{n,k}$ determina la tasa a la cual se fusionan k bloques cuando se tiene un total de n, es claro que $\lambda_{n,k} \geq 0$, $2 \leq k \leq n$ y $\lambda_{2,2} = 1$.

Luego $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión completamente monótona y $\mu_0 = 1$. Por lo tanto existe una función de distribución Λ tal que su k-ésimo momento esta determinado por μ_k. (Ver Apéndice B)

Ahora,

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-k}\Delta^{n-k}\mu_{k-2} &= (-1)^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(-1)^{n-k-j}\mu_{k-2+j}, \\
&= (-1)^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(-1)^{n-k-j}\mathbb{E}(X^{k-2+j}), \\
&= \mathbb{E}\left[X^{k-2}(-1)^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(-1)^{n-k-j}X^j\right], \\
&= \mathbb{E}\left[X^{k-2}(-1)^{n-k}(-1+X)^{n-k}\right], \\
&= \mathbb{E}\left[X^{k-2}(1-X)^{n-k}\right] \geq 0,
\end{aligned}$$

Entonces por (1.11)

$$\lambda_{n,k} = \mathbb{E}\left(X^{k-2}(1-X)^{n-k}\right), \quad 2 \leq k \leq n,$$

es decir,

$$\lambda_{n,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{n-k}\,\Lambda(dx), \quad 2 \leq k \leq n.$$

∎

En términos del modelo el Teorema anterior establece que asociando a cada uno de los bloques de una generación variables independientes X_i, Bernoulli de parámetro x, los bloques que coalescen en la generación anterior quedan determinados al considerar que a los bloques que les corresponda un éxito de X_i forman un sólo bloque en la generación anterior. Más aún dado un proceso Λ-coalescente R, existe una medida finita con soporte $[0,1]$,

$$v(dx) := x^{-2}\Lambda(dx) \tag{1.12}$$

que determina la tasa a la cual ocurre una coalescencia múltiple en R, de manera que si $R^{[m]}(t) = \pi$ con $\pi = \cup_{i\in\mathbb{N}}\pi_i$ y $|\pi| = n$,

$$\lambda_{n,k} = \mathbb{P}\left(X_1 = 1, ..., X_k = 1, X_{k+1} = 0, ..., X_n = 0\right) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} v(dx),$$

ya las X_i's son intercambiables al ser v.a.i.i.d.

Con esta idea tenemos por cada bloque de una partición $\pi(t)$ un lanzamiento de una moneda en la que con probabilidad p cae cara. Entonces bajo el supuesto de que $\Lambda(\{0\})$, el proceso $\Lambda-$coalescente esta determinado por los átomos de un proceso puntual de Poisson N sobre $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ con intensidad $dt \otimes v(dx)$.

Resumiendo, un proceso Λ-coalescente $R = (R_t, t \geq 0)$ es una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{P}_\infty$ y generador infinitesimal

$$Q_{\xi\eta} = \begin{cases} \lambda_{n,n-k+1}, & \text{si } \xi \subset \eta, \\ -\lambda_n, & \text{si } \xi = \eta, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde $n = |\xi|$, $k = |\eta|$ y $\lambda_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{nk}$.

Recordemos que para el coalescente de Kingman $\left(\Pi^K(t), t \geq 0\right)$ el proceso $(D_t, t \geq 0)$ definido para cada t como el número de bloques no vacíos de $\Pi^K(t)$ es un proceso de puras muertes, donde una muerte representa la coalescencia de dos de los n bloques con que cuenta la partición $\Pi^K(t)$. La tasa de muerte es $n(n-1)/2$ ya que existen $\binom{n}{2}$ particiones $\eta \in \mathcal{P}_\infty$ que se se obtienen por la coalescencia de dos bloques de $\eta \in \mathcal{P}_\infty$ con $|\eta| = n$. Además las coalescencias binarias antes descritas ocurren con tasa 1.

Similarmente definiendo $\mathcal{D}_t := |R_t|$ tenemos que $(\mathcal{D}_t, t \geq 0)$ es un proceso de muertes (aunque no de puras muertes) con espacio de estados $\mathbb{N}$ y tasa de muerte al nivel n

$$g_{n,k} = \binom{n}{n-k+1} \lambda_{n,n-k+1}, \tag{1.13}$$

porque en este caso existen $\binom{n}{n-k+1}$ transiciones de $\xi \in \mathcal{P}_\infty$ a $\eta \in \mathcal{P}_\infty$ tales $\xi \subset \eta$ y cada transición ocurre una tasa $\lambda_{n,n-k+1}$. Entonces el generador infinitesimal de $(\mathcal{D}_t, t \geq 0)$ es

$$\mathcal{Q}_{nk} = \begin{cases} g_{nk}, & \text{si } 1 \leq k < n, \\ -g_n, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde $n, k \in \mathbb{N}$ y para todo n

$$
\begin{aligned}
g_n &= \sum_{k=1}^{n-1} g_{nk} &(1.14)\\
&= \int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} x^{n-k-1} (1-x)^{k-1} \Lambda(dx)\\
&= \int_{[0,1]} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} x^{n-j-2} (1-x)^{j} \Lambda(dx)\\
&= \int_{[0,1]} \frac{1-(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}}{x^2} \Lambda(dx). &(1.15)
\end{aligned}
$$

En adelante suponemos que R_0 es la partición trivial de los singuletes, es decir, el proceso $\Lambda-$coalescente inicia totalmente fragmentado y permanece así durante un tiempo exponencial de parámetro

$$\mu_2 := \lim_{n\to\infty} g_n = \int_0^1 x^{-2}\Lambda(dx).$$

Por lo tanto un proceso con coalescencias múltiples $(R_t : t \geq 0)$ con estado inicial la particin trivial de los singuletes es un proceso de Markov con tasas de transición acotadas si y sólo si $\mu_2 < \infty$. Ahora consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el proceso $(|\varrho_n R_t|, t \geq 0)$ donde ϱ_n es la restricción de $\mathcal{P}_\infty$ a $\mathcal{P}_n$. Sea $\left(\mathfrak{D}_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ su cadena de saltos, es decir, $\left(\mathfrak{D}_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $[n]$ que inicia en n con matriz de probabilidades de transición

$$\mathbf{P}_{nk} = \begin{cases} g_{nk}/g_n, & \text{si } 1 \leq k < n, \\ 0, & \text{si } k = n\ . \end{cases} \tag{1.16}$$

Entonces la probabilidad de que la cadena de saltos este en el primer paso en el estado k con $1 \leq k < n$ es

$$\mathbf{P}_{nk} := \mathbb{P}\left(\mathfrak{D}_1^{(n)} = k\right), \quad 1 \leq k < n. \tag{1.17}$$

1.3.2 Ejemplos

Ejemplo 1.20. Sea Λ la medida de Dirac concentrada en el 0:

$$\Lambda(dx) = \delta_0(dx).$$

De (1.7), $\lambda_{n,k} = 0$ excepto cuando $k = 2$, así en este caso el Λ-coalescente que es justamente el coalescente de Kingman.

Ejemplo 1.21. Similarmente que en el ejemplo anterior tenemos que cuando $\Lambda(dx) = \delta_1$, $\lambda_{n,k} = 0$ excepto en el caso de que $k = n$. Así todos los bloques coalescente en la primera transición, de manera que tenemos una sola raíz y una cantidad infinita de hojas conectadas a ésta, de aquí que este proceso sea conocido coalescente en forma de estrella.

Ejemplo 1.22. El caso en que Λ es la medida uniforme en $(0,1)$, es decir, $\Lambda(dx) = dx$ se conoce como el coalescente de Bolthausen-Sznitman. Las tasas de transición son

$$\lambda_{b,k} = \frac{(k-2)!\,(b-k)!}{(b-1)!} = \left[(b-1)\binom{b-2}{k-2}\right]^{-1},\ 2 \leq k \leq b.$$

Ésta medida es importante por sus conexiones con el modelo físico de la evolución conocido como spin-glass, así como con la teoría de árboles aleatorios.

Ejemplo 1.23. Sea $0 < \alpha < 2$. Suponga que $\Lambda(dx)$ es la distribución $Beta\,(2-\alpha,\alpha)$:

$$\Lambda(dx) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}\,dx.$$

El coalescente resultante es llamado simplemente, Beta-coalescente con parámetro α. Esta es una familia especialmente importante tanto por razones prácticas como teóricas. Está relacionado con la genealogía de poblaciones donde un slo individuo produce una gran cantidad de descendientes y con árboles aleatorios continuos. (Ver [6], [5])

Capítulo 2

Mutaciones en un Λ-coalescente

La variación observada en los individuos de una población se produce por mutaciones en sus ancestros. Uno de los modelos más simples para estudiar la variación debida a mutaciones en un conjunto de individuos es el llamado "infinidad de lados segregados". En este modelo se supone que las mutaciones aparecen sobre cada rama del árbol genealógico de acuerdo a un proceso de Poisson $M = (M(t), t \geq 0)$ de tasa $r > 0$, independientemente de la longitud y el proceso que determina el árbol genealógico. Además cada mutación se tiene solamente en aquellos individuos en los cuales no han ocurrido antes, como consecuencia existen individuos que no son idénticos llamados "lados segregados".

El propósito de este capítulo es analizar el comportamiento asintótico de S_n, el número de mutaciones en una población de tamaño n cuando éste crece infinitamente. En la sección 2.1 derivamos una recurrencia para S_n, misma que nos permite establecer recurrencias para funciones de S_n tales como la transformada de Laplace que caracteriza a una variable aleatoria. En la sección 2.2 probamos la convergencia de $S_n/(nr)$ a una variable aleatoria límite S que está determinada unívocamente por una ecuación funcional estocástica. En la demostración de este resultado utilizamos el Método de Diagonalización de Cantor, así como un par de Lemas que demostramos previamente. Con una suposición adicional en la medida Λ, que en términos del modelo significa que algunos de los bloques de la partición al tiempo t son singuletes, mostramos en la sección 2.3 que S se puede escribir en ley como un funcional exponencial de un proceso de Lévy.

2.1 Recursiones sobre el número total de mutaciones

Sea S_n el número de mutaciones a lo largo de un árbol genealógico de una población de tamaño n. Entonces siguiendo con la terminología introducida en el capítulo anterior, S_n está determinado por el número de mutaciones que ocurren antes de la primera transición de la cadena de saltos del proceso $(|\varrho_n R_t|, t \geq 0)$, recordemos que ésta ocurre en un tiempo exponencial de parámetro g_n dado por (1.14). Así como por el número de mutaciones que ocurren después de ésta, es decir, el número de mutaciones que ocurren en una población de tamaño $\mathfrak{D}_1^{(n)}$. Por lo tanto,

$$S_n = Y_n + S_{\mathfrak{D}_1^{(n)}} = Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\left\{\mathfrak{D}_1^{(n)}=k\right\}} S_k, \quad n \geq 2. \tag{2.1}$$

donde Y_n es el número de mutaciones que se originan durante un tiempo $\tau_n \overset{\mathcal{L}}{=} \exp(g_n)$. Obviamente $S_1 = 0$.

Observe que la independencia entre el proceso de mutaciones y el proceso que genera el árbol genealógico implica que para todo $k \in [n-1]$ las variables $\mathbf{1}_{\left\{\mathfrak{D}_1^{(n)}=k\right\}}$ y S_k son independientes. Además condicionalmente sobre τ_n, Y_n es una variable aleatoria Poisson de parámetro $nr\tau_n$ ya que hasta antes de τ_n tenemos una población de n individuos independientes en los cuales ocurre una mutación de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro r. Luego,

$$\mathbb{E}\left(s^{Y_n}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(s^{Y_n} \,|\tau_n\right)\right) = \mathbb{E}\left(e^{-nr\tau_n(1-s)}\right) = \frac{g_n}{g_n + nr\left(1-s\right)}, \quad s \in [0,1],$$

de aquí Y_n tiene distribución geométrica de parámetro $p = \frac{g_n}{g_n+nr}$. En consecuencia con $q = 1-p$,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{q}{p} \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}. \tag{2.2}$$

Gracias a (2.1) es posible determinar recursiones para funciones de S_n. Así por ejemplo la función generadora de probabilidades para $n \geq 2$ y $s \in [0,1]$ satisface

$$\mathbb{E}\left(s^{S_n}\right) = \mathbb{E}\left(s^{Y_n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}_{nk}\mathbb{E}\left(s^{S_k}\right) = \frac{1}{g_n + nr\left(1-s\right)}\sum_{k=1}^{n-1} g_{nk}\mathbb{E}\left(s^{S_k}\right). \tag{2.3}$$

Recordando que $S_1 = 0$ es claro que $\mathbb{E}\left(s^{S_1}\right) = 1$.

Así mismo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S_n\right) &= \mathbb{E}\left(Y_n\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\left\{\mathfrak{D}_1^{(n)}=k\right\}}S_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(Y_n\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}_{nk}\mathbb{E}\left(S_k\right) \\
&= \frac{nr}{g_n} + \frac{1}{g_n}\sum_{k=2}^{n-1} g_{nk}\mathbb{E}\left(S_k\right),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde la segunda igualdad se tiene por independencia entre $\mathbf{1}_{\left\{\mathfrak{D}_1^{(n)}=k\right\}}$ y S_k junto con (1.17), mientras que la última por (1.16).

También

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S_n^2\right) &= \mathbb{E}(Y_n^2) + 2\mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\left\{\mathfrak{D}_1^{(n)}=k\right\}}S_k\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\left\{\mathfrak{D}_1^{(n)}=k\right\}}S_k^2\right) \\
&= \mathbb{E}(Y_n^2) + 2\mathbb{E}\left(Y_n\right)\left[\mathbb{E}(S_n) - \mathbb{E}(Y_n)\right] + \sum_{k=2}^{n-1}\mathbf{P}_{nk}\mathbb{E}(S_k^2) \\
&= \mathbb{E}\left(Y_n^2\right) - 2\left[\mathbb{E}\left(Y_n\right)\right]^2 + 2\mathbb{E}\left(Y_n\right)\mathbb{E}\left(S_n\right) + \frac{1}{g_n}\sum_{k=2}^{n-1} g_{nk}\mathbb{E}\left(S_k^2\right) \\
&= \frac{nr}{g_n} + 2\frac{nr}{g_n}\mathbb{E}\left(S_n\right) + \frac{1}{g_n}\sum_{k=2}^{n-1} g_{nk}\mathbb{E}\left(S_k^2\right),
\end{aligned}$$

en la segunda igualdad hemos usado (2.4) y en la última (2.2).

Gracias a la Ley de Probabilidad Total tenemos de (2.1) para $n \geq 2$ y $j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_n = j\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\mathfrak{D}_1^{(n)} = k\right) \mathbb{P}\left(Y_n + S_k = j \,\Big|\, \mathfrak{D}_1^{(n)} = k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\mathfrak{D}_1^{(n)} = k\right) \mathbb{P}\left(Y_n + S_k = j\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \mathbf{P}_{nk} \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}\left(Y_n = i\right) \mathbb{P}\left(Y_n + S_k = j \,|Y_n = i\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \mathbf{P}_{nk} \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}\left(Y_n = i\right) \mathbb{P}\left(S_k = j - i\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{g_{nk}}{g_n} \sum_{i=0}^{j} \frac{g_n}{g_n + nr} \left(\frac{nr}{g_n + nr}\right)^i \mathbb{P}\left(S_k = j - i\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{g_{nk}}{g_n + nr} \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{nr}{g_n + nr}\right)^i \mathbb{P}\left(S_k = j - i\right).
\end{aligned}$$

Aquí hemos aplicado la hipótesis de independencia entre el proceso de mutaciones y el proceso que genera el árbol genealógico. Luego (1.17) y (1.16), así como la ley de probablidad total y la independencia observada en un principio. Finalmente utilizamos el hecho de que Y_n es una variable geométrica de parámetro $\frac{g_n}{g_n+nr}$. En el caso en que $n = 1$ es inmediato que $\mathbb{P}(S_1 = 0) = 1$.

Sea L_n la longtud de cada una de las ramas del árbol $(\varrho_n R_t, t \geq 0)$. Observemos que antes de que ocurra la primera transición tenemos un árbol donde cada una de sus n ramas tiene longitud τ_n. Luego siguiendo los mismos argumentos que para S_n establecemos la recurrencia

$$L_n = n\tau_n + L_{\mathfrak{D}_1^{(n)}} = n\tau_n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\left\{\mathfrak{D}_1^{(n)} = k\right\}} L_k, \tag{2.5}$$

donde $n \geq 2$, $\tau_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \exp\left(g_n\right)$ y $L_1 = 0$.

Es claro que el número de mutaciones a lo largo de un árbol esta determinado por el número de mutaciones que ocurran en cada una de sus ramas, en consecuencia

$$S_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} M\left(L_n\right).$$

Más aún,

$$\mathbb{E}\left(S_n\right) = r\mathbb{E}\left(L_n\right) \tag{2.6}$$

ya que las mutaciones ocurren en cada individuo e independientemente de los otros de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro r. Así mismo,

$$\begin{aligned}
Var(S_n) &= \mathbb{E}(Var(S_n|L_n)) + Var(\mathbb{E}(S_n|L_n)) \\
&= \mathbb{E}(rL_n) + Var(rL_n) \\
&= r\mathbb{E}(L_n) + r^2 Var(L_n)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

y por lo tanto,

$$\mathbb{E}(S_n^2) = r\mathbb{E}(L_n) + r^2\mathbb{E}(L_n^2).$$

Ahora definiendo $a_n := \mathbb{E}(L_n)$ se sigue de (2.4) y (2.6) que

$$a_n = \frac{n}{g_n} + \frac{1}{g_n}\sum_{k=2}^{n-1} g_{nk}a_k. \tag{2.8}$$

De hecho por inducción sobre n

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{g_k}\mathbf{P}^*_{nk}, \tag{2.9}$$

donde $\mathbf{P}^*_{nk} = \sum_{l\in\mathbb{N}_0} \mathbf{P}^{(l)}_{nk}$. En efecto, para $n = 2$ se tiene la igualdad anterior porque en este caso $\left(\mathfrak{D}^{(n)}_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es la cadena de saltos asociada a un n-coalescente, en consecuencia $\mathbf{P}^{(l)}_{nk} = 0$ para $l \in \mathbb{N}$. Suponiendo que (2.9) también es válida para cada $k \leq n$ probemos que se cumple para $k = n + 1$. Como un primer paso tenemos por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_{n+1}}\sum_{k=2}^{n} g_{n+1,k}a_k &= \sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}_{n+1,k}\sum_{j=2}^{k}\frac{j}{g_j}\mathbf{P}^*_{kj} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{j}{g_j}\mathbf{P}_{n+1,k}\mathbf{P}^{(l)}_{kj}\\
&= \sum_{j=2}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{n}\frac{j}{g_j}\mathbf{P}_{n+1,k}\mathbf{P}^{(l)}_{kj} = \sum_{j=2}^{n}\frac{j}{g_j}\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{P}^{(l+1)}_{n+1,j}\\
&= \sum_{j=2}^{n}\frac{j}{g_j}\mathbf{P}^*_{n+1,j}
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Sustituyendo la igualdad anterior anterior en (2.6) y observando que $\mathbf{P}^*_{n+1,n+1} = 1$ porque $\mathbf{P}^l_{n+1,n+1} = 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$, se sigue que (2.9) es cierta para $k = n + 1$ y en consecuencia para $n \geq 2$.

2.1.1 Ejemplos

Ejemplo 2.1 (Coalescente de Kingman)**.** En este caso $\lambda_{n,k} = 0$ excepto cuando $k = 2$, luego $g_n = g_{n,n-1} = n(n-1)/2$ por (1.13) y (1.14). Así de (1.17), $\mathfrak{D}^{(n)}_1 = n - 1$ c.s. y por lo tanto (2.5) se reduce a

$$L_n = n\tau_n + L_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

donde las τ_i's son v.a.i. con distribución exponencial de parámetro $g_i = i(i-1)/2$. Recordando que $L_1 = 0$ obtenemos que $L_n = \sum_{i=2}^{n} i\tau_i$ lo cual implica que

$$\mathbb{E}(L_n) = \sum_{i=2}^{n} i\mathbb{E}(\tau_i) = \sum_{i=2}^{n}\frac{2}{i-1} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \sim 2\log n$$

y

$$VarE(L_n) = \sum_{i=2}^{n} i^2 Var(\tau_i) = \sum_{i=2}^{n}\frac{4}{(i-1)^2} = 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \sim \frac{2\pi^2}{3} \sim 2\log n.$$

Entonces de (2.6) y (2.7),

$$\mathbb{E}(S_n) = r\mathbb{E}(L_n) \sim \theta \log n \quad \text{y} \quad Var(S_n) = r\mathbb{E}(L_n) + r^2 Var(L_n) \sim \theta \log n,$$

donde $\theta := 2r$. Análogamente tenemos que $S_n = \sum_{k=2}^{n} Y_k$, donde las Y_k's son v.a.i. con distribución geométrica de parámetro $p = \frac{k-1}{k-1+2r}$. Entonces la función generadora de S_n esta dada por

$$\mathbb{E}(s^{S_n}) = \prod_{k=2}^{n} \mathbb{E}(s^{Y_k}) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k-1+\theta(1-s)}.$$

De aquí,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{n-1}{\theta} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \binom{n-2}{j-1} \left(\frac{\theta}{j+\theta}\right)^{k+1}, \quad n \geq 2,\ k \geq 0.$$

Ejemplo 2.2 (Coalescente en forma de Estrella)**.** Sabemos que $\lambda_{nk} = \mathbf{1}_{\{n=k\}}$, entonces utilizando los mismos argumentos que en el ejemplo anterior tenemos que $g_n = g_{n1} = 1$ y en consecuencia, $\mathfrak{D}_1^{(n)} = 1$ c.s. Luego para $n \geq 2$, $L_n = n\tau_n$, donde $\tau_n \overset{\mathcal{L}}{=} \exp(1)$, de aquí

$$\mathbb{E}(L_n) = n \quad \text{y} \quad Var(L_n) = n^2.$$

Así mismo,

$$\mathbb{E}(S_n) = nr \quad \text{y} \quad Var(S_n) = nr(1+nr).$$

Observe que también podemos obtener esta conclusión utilizando la recurrencia (2.1) pues está implica que $S_n = Y_n$, una variable aleatoria geométrica de parámetro $1/(1+nr)$ tal y como lo deducimos al inicio de esta sección.

2.2 Asíntotas sobre el número total de mutaciones

En adelante estudiamos el comportamiento asintótico del número de mutaciones S_n, a lo largo de un árbol genealógico de una población de tamaño n modelada por un proceso Λ-coalescente.

Recordemos que $v(dx) := x^{-2}\Lambda(dx)$ es una medida finita con soporte $[0,1]$ y $\mu_2 < \infty$. Entonces suponiendo adicionalmente que $v(\{0\}) < \infty$ tenemos

$$\Lambda(\{0\}) = 0 \quad \text{y} \quad \mu_{-2} := \int_{(0,1]} x^{-2}\Lambda(dx) < \infty. \tag{2.10}$$

Definimos

$$m_k := \int x^k v(dx)$$

bajo la hipótesis de que $v([0,1]) > 0$ para excluir el caso trivial en el cual $\Lambda \equiv 0$ y obtener que $m_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $m_i > m_{i+1}$.

Antes de establecer un resultado asintótico para S_n probamos.

Lema 2.3. *Si la medida $\Lambda \neq 0$ satisface (2.10), entonces*

i) $1 - \mathfrak{D}_1^{(n)}/n$ *converge en distribución a una medida de probabilidad* $v_0 := v/m_0$.

ii) Existe una constante $c > 0$ (que depende de Λ pero no de n ni de r) tal que $\mathbb{E}(S_n) \leq cnr$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y todo $r \geq 0$.

iii) La transformada de Laplace ψ_n de $S_n/(nr)$ satisface que $-c \leq \psi_n'(\lambda) \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\lambda \geq 0$, donde c es la constante en (ii).

Prueba. i) Recordando (1.15) tenemos

$$g_n = \int_{[0,1]} \frac{1-(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}}{x^2} \Lambda(dx),$$

es decir,

$$g_n = m_0 - \int_{[0,1]} (1-x)^n v(dx) - \int_{[0,1]} nx(1-x)^{n-1} v(dx).$$

Dado que v es una medida finita, por el Teorema de Convergencia Dominada y el Teorema de Convergencia Monótona las integrales del lado derecho de la igualdad anterior convergen a cero en el límite cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} g_n = m_0. \tag{2.11}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
g_n \mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{\mathfrak{D}_1^{(n)} - 1}{n}\right)^l\right] &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^l g_{nk} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^l \int_{[0,1]} \binom{n}{n-k+1} x^{n-k+1} (1-x)^{k-1} v(dx) \\
&= \int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^l \mathbb{P}\left(Z_n(x) = n-k+1\right) v(dx) \\
&= \int_{[0,1]} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^l \mathbb{P}\left(Z_n(x) = i\right) v(dx) \\
&= \int_{[0,1]} \left[\mathbb{E}\left(Z_n(x)/n\right)^l - (1/n)^l \mathbb{P}\left(Z_n\left(x\right) = 1\right)\right] v(dx).
\end{aligned}$$

La primera igualdad es consecuencia de (1.16) y (1.17), mientras que la segunda de (1.15). En las siguientes $Z_n(x)$ denota una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y x. Luego por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\int_{[0,1]} \left[\mathbb{E}\left(Z_n(x)/n\right)^l - (1/n)^l \, \mathbb{P}\left(Z_n(x) = l\right)\right] v(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[0,1]} x^l v(dx) = m_l,$$

ya que por propiedades de la función generadora de momentos

$$\mathbb{E}\left(Z_n(x)\right)^l = \sum_{k=1}^{l} \frac{n!}{(n-k)!} x^k.$$

Así
$$\mathbb{E}\left(1-\frac{\mathfrak{D}_1^{(n)}-1}{n}\right)^l \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{m_l}{m_0} \tag{2.12}$$
y por lo tanto los momentos de $1-\left(\mathfrak{D}_1^{(n)}-1\right)/n$ convergen a los momentos de $v_0 := v/m_0$. El resultado se tiene por el Apéndice A y ya que $1-\frac{\mathfrak{D}_1^{(n)}-1}{n}$ es uniformemente acotada en $[0,1]$, es decir, la distribución de $1-\frac{\mathfrak{D}_1^{(n)}-1}{n}$ está concentrada en $[0,1]$.

ii) Tomando $l=1$ en (2.12) tenemos que para n suficientemente grande $\mathbb{E}\left(1-\frac{\mathfrak{D}_1^{(n)}-1}{n}\right) \sim \frac{m_1}{m_0}$. Entonces
$$\sum_{k=2}^{n-1} k\mathbf{P}_{nk} \leq \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbf{P}_{nk} = \mathbb{E}\left(\mathfrak{D}_1^{(n)}\right) \sim n\left(1-\frac{m_1}{m_0}\right),$$
lo cual implica que existe $p\in(0,1)$ que depende de Λ pero no de n tal que
$$\sum_{k=2}^{n-1} k\mathbf{P}_{nk} \leq np, \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N},$$
pues $\left(1-\frac{m_1}{m_0}\right)<1$. Más aún por inducción sobre l,
$$\sum_{k=2}^{n-1} k\mathbf{P}_{nk}^{(l)} \leq np^l, \quad \text{para todo } l,n\in\mathbb{N}. \tag{2.13}$$
En efecto,
$$\sum_{k=2}^{n-1} k\mathbf{P}_{nk}^{(l+1)} = \sum_{k=2}^{n-1} k \sum_{j=k}^{n-1} \mathbf{P}_{nj}^{(l)}\mathbf{P}_{jk} = \sum_{j=2}^{n-1} \mathbf{P}_{nj}^{(l)} \sum_{k=2}^{j} k\mathbf{P}_{jk} \leq p\sum_{j=2}^{n-1} j\mathbf{P}_{nj}^{(l)} \leq np^{l+1},$$
donde la primera igualdad se tiene por la ecuación de Chapman-Kolmogorov y la última por hipótesis de inducción.

Por otro lado observemos que $\{g_n\}$ es monótona creciente por (1.15) y $g_2=1$ porque este caso corresponde a la tasa de coalescencia de dos bloques. Entonces para $k\geq 2$, $1/g_k\leq 1$. Ahora utilizando (2.6), (2.9) y (2.13)
$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(S_n)}{nr} &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{g_k}\mathbf{P}^*_{nk} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}^*_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\mathbf{P}_{nk}^{(l)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}_{nk}^{(l)} = \frac{1}{n}\left(n+\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sum_{k=2}^{n-1} k\mathbf{P}_{nk}^{(l)}\right) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{l\in\mathbb{N}_0} np^l = \frac{1}{1-p},\end{aligned}$$
lo cual implica lo que buscabamos probar.

iii) Sea f_n es la función generadora de probabilidades de S_n. Entonces f_n es no-decreciente debido a que S_n lo es, de aquí $f_n' > 0$. Además es claro que $\psi_n(\lambda) = f_n(s(\lambda))$ con $s(\lambda) := \exp\left(-\lambda/(nr)\right)$, $\lambda \geq 0$. Luego para $\lambda \geq 0$,

$$\psi_n'(\lambda) = -1/(nr)\exp(-\lambda/(nr))f_n'\left(s(\lambda)\right) \leq 0. \tag{2.14}$$

Observando que cuando $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$\mathbb{E}\left(-e^{-\frac{\lambda_2}{nr}(S_n+1)} + e^{-\frac{\lambda_1}{nr}(S_n+1)}\right) > 0,$$

se sigue que $\psi_n'(\lambda_1) < \psi_n'(\lambda_2)$, es decir, ψ_n' es monótona creciente en $[0,\infty)$ y por lo tanto resta verificar que $\psi_n'(0) \geq -c$. Recordando que $f_n'(1) = \mathbb{E}(S_n)$ obtenemos de (2.14) que

$$\psi_n'(0) = -\frac{1}{nr}\mathbb{E}(S_n),$$

de donde se sigue lo que buscabamos por (ii). ∎

Lema 2.4. *Supongamos que* $-\infty \leq \mu := \mathbb{E}\left(\log|A|\right) < 0$. *Si la ecuación funcional estocástica*

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} AX + B \tag{2.15}$$

tiene una solución, entonces la solución es única en distribución.

Prueba. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de variables aleatorias que satisface (2.15), es decir,

$$X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_{n-1}X_{n-1} + B_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $\{(A_n, B_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión de vectores aleatorias en $\mathbb{R}^2$ independientes idénticamente distribuidos tales que $(A_n, B_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (A, B)$. Iterando en la igualdad anterior

$$X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_0\cdots A_{n-1}X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \textstyle\prod_{j=i+1}^{n-1} A_j,$$

o equivalentemente,

$$X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_0\cdots A_{n-1}X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \textstyle\prod_{j=0}^{i-1} A_j,$$

ya que $\{(A_k, B_k)\}_{k\in\mathbb{N}_0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{(A_{n-k-1}, B_{n-k-1})\}_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Gracias a la ley fuerte de los grandes números

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \log|A_k| \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \mathbb{E}\left(\log|A|\right) = \mu \in [-\infty, 0).$$

Entonces $\log|A_0\cdots A_n| \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} -\infty$, de aquí $A_0\cdots A_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$, lo que implica que X es el límite en ley de $\sum_{i=0}^{n-1} B_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j$ cuando $n \to \infty$. Así X depende solamente de (A, B) y no de la sucesión $\{X_n\}$. Por lo tanto la solución de (2.15) es única en ley. ∎

Teorema 2.5. *Si la medida $\Lambda \neq 0$ satisface (2.10), entonces $S_n/(nr)$ converge en distribución a una variable aleatoria límite S. La distribución de S está determinada unívocamente por la ecuación funcional estocástica*

$$S \stackrel{\mathcal{L}}{=} AS + B, \tag{2.16}$$

donde A y B son variables aleatorias independientes de S tales que $1 - A \stackrel{\mathcal{L}}{=} v_0$ y $B \stackrel{\mathcal{L}}{=} \exp(m_0)$. La transformada de Laplace de S, ψ esta unívocamente determinada por la ecuación funcional

$$\psi(\lambda) = \frac{m_0}{m_0+\lambda}\mathbb{E}\left[\psi(A\lambda)\right] = \frac{1}{m_0+\lambda}\int_{[0,1]} \psi((1-x)\lambda)v(dx), \quad \lambda \geq 0. \tag{2.17}$$

Prueba. Consideremos que la tasa de mutación $r > 0$ es fija y supongamos que ψ_n es la transformada de Laplace de $S_n/(nr)$. Como un primer paso verificamos utilizando el método de diagonalización de Cantor que existe una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de enteros tal que para cada $\lambda \geq 0$ el límite $\lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(\lambda)$ existe.

Sea $\{q_1, q_2, ...\}$ una representación de $\mathbb{Q}_+$. Dado que la transformada de Laplace es acotada, la sucesión $\{\psi_n(q_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. Entonces por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $\{\psi_{1k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que el límite $\psi(q_1) := \lim_{k\to\infty} \psi_{n_{1k}}(q_1)$ existe.

Similarmente, la sucesión $\{\psi_{1k}(q_2)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada y por lo tanto existe una subsucesión $\{\psi_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que el límite $\psi(q_2) := \lim_{k\to\infty} \psi_{n_{2k}}(q_2)$ existe. Además $\lim_{k\to\infty} \psi_{n_{2k}}(q_1) = \psi(q_1)$, ya que $\{\psi_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{\psi_{1k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Continuando con este proceso obtenemos

$$\begin{array}{llllll}
\psi_{11}, & \psi_{12}, & \cdots & \psi_{1k}, & \cdots & \text{converge a } \psi(q_1), \\
\psi_{21}, & \psi_{22}, & \cdots & \psi_{2k}, & \cdots & \text{converge a } \psi(q_1), \psi(q_2), \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \\
\psi_{j1}, & \psi_{j2}, & \cdots & \psi_{jk}, & \cdots & \text{converge a } \psi(q_1), \psi(q_2), ..., \psi(q_j), \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

Observemos que salvo por los primeros $j-1$ términos, la sucesión $\{\psi_{kk}, k \in \mathbb{N}\}$ es una subsucesión de $\{\psi_{jk}, k \in \mathbb{N}\}$ la cual converge a $\psi(q_j)$. Luego, la sucesión diagonal $\{\psi_{kk}, k \in \mathbb{N}\}$ converge a $\psi(q_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto considerando $n_k = kk$ el límite $\psi(q_j) = \lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(q_j)$ existe para todo $q \in \mathbb{Q}_+$.

Veamos ahora que ψ es Liptschitz continua sobre $\mathbb{Q}_+$. Por el Teorema del Valor Medio para $p, q \in \mathbb{Q}_+$ existe $\xi \equiv \xi(n_k, p, q) \in (p, q)$ tal que

$$\psi'_{n_k} = \frac{\psi_{n_k}(p) - \psi_{n_k}(q)}{p-q}.$$

Luego,

$$|\psi(p) - \psi(q)| = \lim_{k\to\infty} |\psi_{n_k}(p) - \psi_{n_k}(q)| = \lim_{k\to\infty} \left|\psi'_{n_k}(\xi)(p-q)\right| \leq c\,|p-q|\,,.$$

donde la desigualdad buscada se tiene por el Lema 2.3 (iii).

Supongamos ahora que $\{a_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ y $\{b_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números racionales tales que $a_l \uparrow \lambda$ y $b_l \downarrow \lambda$, con $\lambda \geq 0$ arbritrario. Entonces,

$$\psi_{n_k}(a_l) \geq \psi_{n_k}(\lambda) \geq \psi_{n_k}(b_l),$$

ya que S_n es una variable aleatoria no negativa y la transformada de Laplace es monótona decreciente sobre $\mathbb{R}_+$. Haciendo que $k \to \infty$

$$\psi(a_l) \geq \limsup_{k\to\infty} \psi_{n_k}(\lambda) \geq \liminf_{k\to\infty} \psi_{n_k}(\lambda) \geq \psi(b_l).$$

Esto implica que

$$\limsup_{k\to\infty} \psi_{n_k}(\lambda) - \psi(\lambda) = \liminf_{k\to\infty} \psi_{n_k}(\lambda) - \psi(\lambda) = 0,$$

debido a que cuando $l \to \infty$, $\psi(a_l) - \psi(b_l)$ converge a cero por ser ψ Liptschitz continua sobre $\mathbb{Q}^+$. Así el límite

$$\psi(\lambda) := \lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(\lambda)$$

existe para $\lambda \geq 0$ y por lo tanto ψ es continua sobre $\mathbb{R}_+$. Más aún, ψ es Lipschitz continua en $\mathbb{R}_+$ por un procedimiento análogo al realizado para $\lambda \in \mathbb{Q}_+$.

En adelante suponemos

$$\psi(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda). \tag{2.18}$$

Sea F_n la función de distribución asociada a ψ_n. Por el método de diagonalización de Cantor, existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que F_{n_k} converge a F_∞ cuando $k \to \infty$, donde F_∞ es una función de distribución posiblemente no propia. Ahora como $\lambda > 0$, $e^{-\lambda x}$ es una función continua que se anula en el límite cuando $|x| \to \infty$ el Teorema 4.4.1 de [8] implica que

$$\psi_\infty(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(\lambda)$$

donde ψ_∞ es la transformada de Laplace de F_∞. En consecuencia $\psi_\infty(\lambda) = \psi(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Más aún $\psi_\infty(\lambda) = \psi(\lambda)$ para $\lambda = 0$ ya que ψ y ψ_∞ son funciones continuas.

Es claro que $F_\infty(\infty) = \psi_\infty(0) = \psi(0) = 1$, luego F_∞ es una función de distribución. Por lo tanto asociando a S la función de distribución F_∞, concluimos que ψ es la trasformada de Laplace de una variable S tal que $\left\{\frac{S_{n_k}}{n_k r}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a S.

Probemos ahora que la distribución de S no depende de $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, para ello primeramente tomamos $s = e^{-\lambda/nr}$ en la recursión (2.3)

$$\begin{aligned}
\psi_n(\lambda) &= \frac{g_n}{g_n + nr\left(1 - e^{-\lambda/(nr)}\right)} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}_{nk} \mathbb{E}\left(e^{-\lambda k S_k/nkr}\right) \\
&= \frac{g_n}{g_n + nr\left(1 - e^{-\lambda/(nr)}\right)} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}_{nk} \psi_k\left(\frac{k}{n}\lambda\right).
\end{aligned}$$

Ahora de (2.11)

$$\lim_{n\to\infty} g_n = m_0$$

y por expansión en serie de Taylor $\lim_{n\to\infty} nr\left(1 - e^{-\lambda/(nr)}\right) = \lambda$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{g_n + nr\left(1 - e^{-\lambda/(nr)}\right)} = \frac{m_0}{m_0 + \lambda}, \tag{2.19}$$

así el límite corresponde a la transformada de Laplace de una variable B, exponencial de parámetro m_0. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\psi_k\left(\frac{k}{n}\lambda\right)\mathbf{P}_{nk} &= \sum_{k=1}^{n-1}\psi_k\left(\frac{k}{n}\lambda\right)\mathbb{P}\left(\mathfrak{D}_1^{(n)}=k\right)\\ &= \sum_{x\in\{1/n,\dots,(n-1)/n\}}\psi_{n(1-x)}\left((1-x)\lambda\right)\mathbb{P}\left(1-\mathfrak{D}_1^{(n)}/n=x\right)\\ &= \int_{[0,1]}\psi_{[n(1-x)]}\left((1-x)\,\lambda\right)\frac{v(dx)}{m_0},\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene por (1.17), la segunda de hacer al cambio de variable $\frac{k}{n}=1-x$ y la última como consecuencia del Lema 2.3 (i). Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada y la continuidad de ψ

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\psi_k\left(\frac{k}{n}\lambda\right)\mathbf{P}_{nk} = \int_{[0,1]}\lim_{k\to\infty}\psi_{[n_k(1-x)]}\left((1-x)\lambda\right)\frac{v(dx)}{m_0} \tag{2.20}$$

$$= \int_{[0,1]}\psi\left((1-x)\lambda\right)\frac{v(dx)}{m_0}. \tag{2.21}$$

De (2.18), (2.19), y (2.20)

$$\psi(\lambda)=\frac{m_0}{m_0+\lambda}\int_{[0,1]}\psi\left((1-x)\lambda\right)\frac{v(dx)}{m_0},$$

que es justamente (2.17) ya que $v_0(dx)=\frac{v(dx)}{m_0}$.

En el sentido de variables aleatorias la ecuación funcional anterior es equivalente a que $S\overset{\mathcal{L}}{=}AS+B$, donde A y B son variables aleatorias independientes entre si y de S tales que $1-A\overset{\mathcal{L}}{=}v_0$ y $B\overset{\mathcal{L}}{=}\exp(m_0)$. Dado que la variable aleatoria A toma valores en $[0,1]$ y v_0 no es la medida cero, $\mathbb{P}(A=1)<1$. Entonces, $-\infty\le\mathbb{E}(\log A)<0$. Así por el Lema 2.4, S es única en ley y por lo tanto no depende de la subsucesión, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. ■

Corolario 2.6. *Supongamos que la medida $\Lambda\neq 0$ satisface las condiciones (2.10). Entonces, al menos para $0\le\lambda<m_0$, la transformada de Laplace ψ de S tiene la expansión en serie de Taylor $\psi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^k$, con $c_0:=1$ y*

$$c_k:=\frac{1}{\int\left((1-x)^i-1\right)v(dx)},\ k\in\mathbb{N}. \tag{2.22}$$

En particular, S tiene momentos

$$\mathbb{E}\left(S^k\right)=\prod_{i=1}^{k}\frac{i}{\Phi(i)}=\frac{k!}{\Phi(1)\cdots\Phi(k)},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{2.23}$$

donde $\Phi(i):=\int_{[0,1]}[1-(1-x)^i]v(dx)$, $i\in\mathbb{N}$.

Prueba. Supongamos que los $c_k's$ estan dados por (2.22) y probemos que $\psi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ converge. Dado que $x \in [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{[0,1]} \left(1-(1-x)^i\right) v(dx) \leq \int_{[0,1]} \left(1-(1-x)^{i+1}\right) v(dx).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\int_{[0,1]} (1-(1-x)^i)\, v(dx)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\int_{[0,1]} (1-(1-x))\, v(dx)} \right)^k\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ es convergente si y solamente si $0 \leq \lambda < m_0$.

La igualdad (2.23) es inmediata pues es bien sabido que

$$\mathbb{E}\left(S^k\right) = (-1)^k \psi^{(k)}(0^+) = (-1)^k k! c_k.$$

■

2.2.1 Ejemplos

Ejemplo 2.7. Suponga que Λ es absolutamene continua con respecto a la medida de Lebesgue y su función de densidad es $f(x) = \beta x^2 (1-x)^{\beta-1}$ con $x \in [0,1]$ y $\beta > 0$ fijo. Entonces, v es la distribución Beta de parámetros $(1,\beta)$ y por lo tanto $m_0 = 1$. Obviamente la condición (2.1) se tiene, luego por el Teorema 2.5 $S_n/(nr)$ converge en ley a una variable aleatoria S, cuya transformada de Laplace esta determinada por la ecuación funcional

$$(1+\lambda)\,\psi\,(\lambda) = \beta \int_0^1 \psi\left((1-x)\lambda\right)(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Haciendo el cambio de variable $z = (1-x)\lambda$ en la integral anterior y derivando respecto a λ obtenemos la ecuación diferencial

$$\psi'\,(\lambda) + \frac{1+\beta}{1+\lambda} \psi\,(\lambda) = 0, \tag{2.24}$$

cuya condición inicial es $\psi(0) = 1$. Multiplicando (2.24) por el factor $(1+\lambda)^\beta$ obtenemos una ecuación diferencial exacta con única solución $\psi(\lambda) = 1/(1+\lambda)^{\beta+1}$, $\lambda \geq 0$. Luego, por unicidad de la transformada de Laplace, S tiene distribución Gamma de parámetros $(\beta+1, 1)$, es decir, la función de densidad de probabilidad de S es $g(x) = x^\beta e^{-t}/\Gamma(\beta+1)$, $t \geq 0$.

Ahora observemos que cuando $\beta = 1$, v es la distribución uniforme en $[0,1]$. Entonces de (1.15) y (1.16) las tasas infinitesimales del proceso $(\mathcal{D}_t, t \geq 0)$ son $g_{nk} = 1/(n+1)$, $1 \leq k < n$, mientras que la tasa total es $g_k = (n-1)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\left(\mathfrak{D}_k^{(n)}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ salta con probabilidad $\mathbf{P}_{nk} = g_{nk}/g_n = 1/(n-1)$ de n a k donde $1 \leq k < n$.

Ejemplo 2.8. Sea $\Lambda = \delta_u$ la medida de Dirac con $u \in (0,1]$. Luego, v también está concentrada en algún $u \in (0,1]$ y $m_0 = v\left([0,1]\right) = u^{-2}$. Así Λ satisface las condiciones del Teorema 2.5 y por lo tanto S_n/nr converge en ley a una variable aleatoria no-negativa S. Más aún, la distribución de S y su transformada de Laplace estan determinadas respectivamente, por las ecuaciones funcionales estocásticas

$$S \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1-u^2)S + B \quad \text{y} \quad (1+u^2\lambda)\psi(\lambda) = \psi\left((1-u)\lambda\right), \quad \lambda \geq 0$$

donde $B \stackrel{\mathcal{L}}{=} \exp\left(u^{-2}\right)$ es independiente de S.

Gracias al Corolario 2.6 los momentos de S estan dados por

$$\mathbb{E}(S^k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{iu^2}{1-(1-u)^i} = k!u^{2k} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-(1-u)^i}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Luego $\mathbb{E}(S) = u$ y $Var(S) = u^3/(2-u)$.

2.3 Algunas extensiones

Sabemos por el Lema (1.16) que c.s. después de cualquier cantidad de tiempo el número total de bloques en el coalescente de Kingman es finito. Debido a que este proceso es un caso particular de un proceso Λ-coalescente, resulta natural pensar que la propiedad anterior también la posee ésta clase más amplia de procesos coalescentes, sin embargo, en general esto no ocurre. Las condiciones necesarias y suficientes que hacen que el Λ-coalescente regrese desde el infinito son específicadas a continuación.

Lema 2.9. *Un proceso Λ-coalescente $(R_t, t \geq 0)$, tiene frecuencias propias c.s. para cada $t > 0$ si y sólo si*

$$\mu_{-1} := \int_{(0,1]} x^{-1}\Lambda(dx) = \infty. \tag{2.25}$$

Prueba. Por el Teorema de correspondencia de Kingman la partición "paint-box " es una versión de una partición intercambiable $\pi \in \mathcal{P}_\infty$. Luego por la proposición (1.11), π tiene frecuencias asintóticas propias si y sólo si ninguno de sus bloques es un singulete. Más aún, si y solamente si $\{1\}$ no es uno de los bloques, al ser π intercambiable. Consideremos el proceso $(\varrho_m R_t, t \geq 0)$ bajo el supuesto de que $|\varrho_m R_t| = n$ y $\{1\}$ es uno de estos bloques. Entonces la tasa a la cual $k-1$ bloques coalescen con $\{1\}$ es

$$\lambda_n := \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1} \lambda_{n,k} = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n-1}}{x}\Lambda(dx), \tag{2.26}$$

en la última igualdad usamos (1.6). Así en el límite cuando n crece λ_n está acotada por μ_{-1}. Ahora observemos que si τ es el tiempo al cual $\{1\}$ coalesce con alguno de los otros bloques, entonces para cada $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(\tau > t) \leq e^{-\mu_{-1}t}.$$

Suponiendo que $\mu_{-1} < \infty$ la igualdad anterior implica que hasta el tiempo t, $\{1\}$ es todavía un singulete, que es una contradicción. Por lo tanto $\mu_{-1} = \infty$.

Inversamente observemos que si $|\pi| = \infty$, (2.26) implica que hasta el tiempo t, $\{1\}$ coalesce con los restantes bloques a una tasa infinita, de modo que R no tiene singuletes y por lo tanto sus frecuencias son propias. En el caso en que $|\pi| < \infty$ tenemos que $\{1\}$ no es uno de los bloques de R_t porque del Teorema de Correspondencia de Kingman y la Proposición 1.11, una partición intercambiable de $\mathbb{N}$ no tiene singuletes. ■

En adelante suponemos que la medida Λ satisface

$$\Lambda(\{0\}) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{(0,1]} x^{-1}\Lambda(dx) < \infty. \tag{2.27}$$

Observemos que las condiciones anteriores son más débiles que las establecidas en (2.10).

Teorema 2.10. *Si la medida $\Lambda \neq 0$ satisface las condiciones (2.27), entonces $S_n/(nr)$ converge en distribución a una variable aleatoria límite no-negativa S que está determinada unívocamente por sus momentos. La transformada de Laplace ψ de S satisface la ecuación integral*

$$\lambda\psi(\lambda) = \int_{[0,1]} [\psi((1-x)\lambda) - \psi(\lambda)]v(dx) \tag{2.28}$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad suponemos que $m_0 := v([0,1]) = \infty$ pues de no ser así este resultado es equivalente al Teorema 2.5, ya que las igualdades (2.28) y (2.17) lo son.

Definamos $v_m(dx) := \mathbf{1}_{\{x>1/m\}}v(dx)$ y $\Lambda_m(dx) := x^2 v_m(dx)$. Sea $S_n(m)$ el número de mutaciones en una población de tamaño n modelada por un proceso Λ_m-coalescente. Entonces del Teorema 2.5 se sigue que bajo la medida Λ_m, $S_n(m)/(nr)$ converge débilmente a una variable aleatoria límite $S(m)$ cuya distribución está unívocamente determinada por sus momentos,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(S^k(m)\right) &= \prod_{i=1}^{k} \frac{i}{\int (1-(1-x)^i)v(dx)} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{i}{\int_{(1/m,1]}(1-(1-x)^i)v(dx)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Observando que el lado derecho de (2.29) converge a (2.23) cuando $m \to \infty$ se sigue que $S(m)$ converge en distribución a una variable aleatoria límite S cuyos momentos están dados por (2.23).

Por otro lado tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{t}{\Phi(i)}$ converge, dado que $\lim_{n\to\infty}\Phi(n) = v([0,1]) = \infty$ implica que para toda t existe k tal que $t < \Phi(n)$ para $n > k$ y de aquí

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{\prod_{j=1}^{k}\Phi(j)} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{\prod_{j=n+1}^{k}\Phi(j)} \\ &\leq t^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^{k-n}}{\Phi^{k-n}(n+1)} \\ &= t^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{\Phi^j(n+1)} < \infty.\end{aligned}$$

Entonces del Teoremas 2 del Captulo 3 de [17] la función generadora de momentos existe y así por el Teorema 3 de está misma referencia, la distribución de S está unívocamente determinada por los momentos dados en (2.23). Ahora Λ_m converge débilmente a Λ cuando m crece y por lo tanto $\{S_n/(nr)\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Consideremos la transformación $T : [0,1] \to [0,\infty]$

$$T(y) := -\log(1-y), \tag{2.30}$$

con la convención de que $T(1) = \infty$.

Proposición 2.11. *Supongamos que la medida $\Lambda \neq 0$ satisface las condiciones (2.27). Entonces la distribución de la variable aleatoria límite la podemos escribir como*

$$S \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^\infty e^{-X_t} dt, \tag{2.31}$$

donde $(X_t, t \geq 0)$ es un subordinador con "drift" cero y medida de Lévy $\varrho := v_T$ donde $\varrho = v \cdot T^{-1}$.

Prueba. Es bien sabido que la función

$$\Phi(x) := \int_{[0,\infty]} (1 - e^{xy})\varrho(dy) = \int_{[0,1]} (1 - (1-y)^x) v(dy) \tag{2.32}$$

es el exponente de Laplace de un subordinador donde ϱ es la medida de Lévy. Tal y como veremos en el siguiente capítulo los momentos de $Z := \int_0^\infty e^{-X_t} dt$ están dados por

$$\mathbb{E}(Z^k) = \frac{k!}{\Phi(1)\cdots\Phi(k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Además estos determinan unívocamente la distribución de Z, luego por la igualdad entre (2.23) y (2.32) para cada k se sigue la igualdad en ley buscada. ■

A continuación establecemos una relación entre el subordinador X_t que define al funcional exponencial Z y el modelo.

Proposición 2.12. *Sea $S_t = 1 - \sum_{i=1}^\infty s_i$ las frecuencias de los singuletes al tiempo t en un proceso $\Lambda-$coalescente R. Si $\mu_1 < \infty$ entonces el proceso $(-\log S_t, t \geq 0)$ es un subordinador sin deriva cuya medida de Lévy es la imagen de $v(dx)$ bajo el mapeo T. Además la distribución de S_t sobre $[0,1]$ está determinada por sus momentos los cuales están dados por*

$$\mathbb{E}(S_t^n) = \exp\left[-t\int_0^1 (1-(1-x)^n) v(dx)\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.3.1 Ejemplos

Ejemplo 2.13. Suponga que Λ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue con funcin de densidad $f(x) = x$. Entonces,

$$\lambda_{n,k} = \left(k\binom{n}{k}\right)^{-1}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Luego de (1.13), el proceso de muertes $(\mathcal{D}_t, t \geq 0)$ tiene tasas infinitesimales

$$g_{nk} = \frac{1}{n-k+1}, \quad 1 \leq k < n,$$

lo cual implica que su tasa total es

$$g_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}, \quad n \geq 2,$$

de modo que ésta es aproximadamente $\log n$ en el límite cuando $n \to \infty$. Ahora observando que Λ satisface las condiciones (2.10) se sigue del Teorema 2.5 que $S_n/(nr)$ converge en distribución a una variable aleatoria límite S que está determinada por sus momentos que están dados de acuerdo a (2.23) con

$$\begin{aligned}
\Phi(i) &= \int_0^1 (1-(1-x)^i)v(dx) = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^i}{x}dx \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j}(-x)^{j-1}dx = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j}\frac{(-x)^{j-1}}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j}, \quad i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Además, S se puede expresar como en (2.31) donde el subordinador X_t tiene medida de Lévy

$$\varrho([a,b]) = v([1-e^{-a}, 1-e^{-b}]) = \int_{1-e^{-a}}^{1-e^{-b}} \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{1-e^{-b}}{1-e^{-a}}\right).$$

Ejemplo 2.14. Sea Λ una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue con densidad $f(x) = \alpha\beta x^2(1-x)^{\beta-1}$, $\alpha, \beta > 0$. Entonces por el Teorema de Pitman las tasas de transición del proceso de muertes $(\mathcal{D}_t, t \geq 0)$ son

$$\lambda_{n,k} = \alpha\beta \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k+\beta-1}dx = \alpha\beta\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Gracias a (1.13)

$$g_{nk} = \binom{n}{n-k+1}\lambda_{n,n-k+1} = \alpha\beta\frac{n!}{(n+\beta)!}, \quad 1 \leq k < n,$$

de aquí

$$g_n = \alpha\beta(n-1)\frac{n!}{(n+\beta)!}, \quad n \geq 2.$$

Así mismo del Teorema 2.5, $S_n/(nr)$ converge en distribución a una variable aleatoria S con momentos dados por (2.23) donde en este caso particular

$$\Phi(k) = \int_0^1 (1-(1-x)^k)\alpha\beta(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\alpha k}{\beta+k}.$$

Ejemplo 2.15. Supongamos que Λ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue concentrada en $(0,1)$ con densidad

$$f(x) = \frac{\lambda}{c\beta^2\Gamma(1-\lambda)} \frac{x^2(1-x)^{(\lambda+v)/\beta-1}}{(1-(1-x)^{1/\beta})^{\lambda+1}}, \quad v \geq 0, \quad c > 0, \quad \lambda \in (0,1). \tag{2.34}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-1}\Lambda(dx) &= \frac{\lambda}{c\beta^2\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 \frac{x(1-x)^{(\lambda+v)/\beta-1}}{(1-(1-x)^{1/\beta})^{\lambda+1}}dx \\
&= \frac{\lambda}{c\beta^2\Gamma(1-\lambda)} \int_0^\infty \frac{(1-e^{-z})e^{-z((\lambda+v)/\beta-1)}}{(1-e^{-z/\beta})^{\lambda+1}}e^{-z}dz \\
&= \frac{\lambda}{c\beta^2\Gamma(1-\lambda)} \int_0^\infty (1-e^{-z})\frac{e^{z(1-v)/\beta}}{(e^{z/\beta}-1)^{\lambda+1}}dz \\
&= \frac{\Gamma(v+\beta+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{c\beta\Gamma(v+\beta+1)}\frac{v+\beta}{\Gamma(1-\lambda)} - \frac{\Gamma(v+\lambda)}{c\beta\Gamma(v)} < \infty. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

donde para la penúltima igualdad hemos usado los cálculos realizados en el Apéndice C. Entonces de la Proposición 2.31 en el límite cuando $n \to \infty$, $S_n/(nr)$ converge a una variable aleatoria S que satisface (2.31) donde en este caso X_t es un subordinador cuya medida de Lévy ϱ tiene densidad

$$g(x) = \frac{\lambda}{c\beta^2\Gamma(1-\lambda)} \frac{e^{x(1-v)/\beta}}{(e^{x/\beta}-1)^{\lambda+1}}.$$

Además S está determinada por sus momentos dados por

$$\mathbb{E}(S^k) = \frac{k!}{\Phi(1)\cdots\Phi(k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

donde por el apéndice C

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(v+\beta x+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{c\beta\Gamma(v+\beta x+1)}\frac{v+\beta x}{\Gamma(1-\lambda)} - \frac{\Gamma(v+\lambda)}{c\beta\Gamma(v)}.$$

En particular para $c = \alpha(1-\alpha)^{-1}$, $v = 0$, $\beta = \alpha$ y $\lambda = 1-\alpha$,

$$f(x) = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \frac{x^2(1-x)^{1/\alpha-2}}{(1-(1-x)^{1/\alpha})^{2-\alpha}}.$$

Luego de (2.35) y el hecho de que $\lim_{z\to 0^+} \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$ ya que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

$$\int_0^1 x^{-1}\Lambda(dx) = \frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} < \infty.$$

Así en este caso X_t es un subordinador con medida de Lévy ϱ de densidad

$$g(x) = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} e^{z/\alpha}(e^{z/\alpha}-1)^{2-\alpha}.$$

y

$$\mathbb{E}(Z^k) = \Gamma(\alpha x - 1)$$

ya que

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(\alpha(x-1)+1)}{\Gamma(\alpha x - 1)} x.$$

Finalmente observando que si X una v.a. con distribución exponencial de parámetro 1,

$$\mathbb{E}(X^{\alpha k}) = \int_0^\infty x^{(\alpha k+1)-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha k + 1)$$

concluimos que $Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} X^\alpha$.

Considerando ahora que $v = 0$, $\lambda = \beta$ y $c = \beta^{-1}$ en (2.34) tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{x^2}{(1-(1-x)^{1/\beta})^{\beta+1}}, \tag{2.36}$$

y el función exponencial Z está dado en términos de un subordinador X_t con exponente de Laplace

$$\Phi(i) = \frac{\Gamma(\beta(i+1))}{\Gamma(\beta i)},$$

de aquí,

$$\mathbb{E}(Z^k) = \frac{n!\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta(k+1))},$$

es decir, los momentos de Z son justamente los de una distribución Mittag-Leffler (ver [19]).

Ejemplo 2.16. Consideremos que Λ se distribuye con una v.a. Gamma de parámetros (α, β), $1 < \alpha < 2$ y $\beta > 0$, es decir,

$$\Lambda(dx) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}. \tag{2.37}$$

Luego,

$$\int_0^1 x^{-1}\Lambda(dx) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} = 1 + \frac{\beta}{\alpha-1} < \infty.$$

Entonces por el Teorema 2.5, $S_n/(nr)$ converge cuando $n \to \infty$ a una variable aleatoria S determinada por sus momentos, los cuales están dados por (2.23) con

$$\begin{aligned}\Phi(i) &= \int_0^1 (1-(1-x)^i) v(dx) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{2-\alpha} \Gamma(\alpha+\beta+i-2)(\Gamma(\beta+i)-\beta), \quad i \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

donde para obtener la igualdad anterior hemos utilizado los cálculos realizados en el ápendice C. Más aún, tenemos la igualdad en ley (2.31) con X_t un subordinador, de medida de Lévy ϱ con densidad

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{e^{y(3-\alpha-\beta)}}{(e^y-1)^{3-\alpha}}.$$

Capítulo 3

Funcionales exponenciales

Iniciamos este capítulo defininendo un proceso de Lévy, luego mostramos que estos son infinitamente divisibles porque a partir de su exponente característico, dado por la fórmula de Levý-Khintchine, es posible obtener la descomposición de Lévy-Iô que ilustra propiedades de sus trayectorias. Consideramos el funcional exponencial I_t de un proceso de Lévy, presentado las condiciones bajo las cuales su valor terminal I_∞ es finito. Finalmente establecemos la forma explícita de los momentos de un subordinador, una clase especial de procesos de Lévy, con la finalidad de determinar su distribución.

3.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 3.1. *Un proceso $X = (X_t, t \geq 0)$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que posee las siguientes propiedades*

(i) X tiene trayectorias càdlàg $\mathbb{P}$-c.s.

(ii) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.

(iii) Para $0 \geq s \geq t$, $X_t - X_s$ es igual en distribución a X_{t-s}

(iv) Para $0 \geq s \geq t$, $X_t - X_s$ es independiente de $(X_u, u \geq s)$.

es llamado proceso de Lévy.

El término “proceso de Lévy” es en honor al matemático francés Paul Lévy cuyas constribuciones jugaron un importante papel en el estudio y caracterización de los procesos con incrementos independientes.

Ejemplos típicos de procesos de Lévy son el Movimiento Browniano y el proceso de Poisson. Así como los procesos Gamma y los procesos estables.

Observando que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \cdots + (X_t - X_{(n-1)t/n}), \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

se sigue de los incrementos independientes y estacionarios de X que para cada $t > 0$, X_t es infinitamente divisible. Denotemos por Ψ su exponente característico, es decir,

$$\Psi_t(\theta) = -\log \mathbb{E}(e^{i\theta X_t}), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Luego de (3.1) con $t = m$ así como $t = 1$ y $n = m$ se tiene

$$m\Psi_1(\theta) = \Psi_m(\theta) = n\Psi_{m/n}(\theta)$$

lo que implica que para cualquier racional $t > 0$

$$\Psi_t(\theta) = t\Psi_1(\theta). \tag{3.2}$$

Cuando t no es un racional existe una sucesión $\{t_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{Q}$ tal que $t_n \downarrow t$ cuando n tiende a infinito. Entonces del Teorema de Convergencia Dominada y el hecho de que X_t tiene trayectorias continuas por la derecha tenemos que (3.1) es válida para todo $t \geq 0$. Así

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X_t}) = e^{-t\Psi(\theta)},$$

donde $\Psi(\theta) := \Psi_1(\theta)$ es el exponente característico de X_1. Por lo tanto, todo proceso de Lévy está determinado por su distribución de una dimensión y puede ser asociado con una distribución infinitamente divisible. Las condiciones necesarias para que dada una distribución infinitamente divisible podamos construir un proceso de Lévy X tal que X_1 tenga ésta distribución se establecen a continuación.

Teorema 3.2 (Fórmula de Lévy-Khintchine para un proceso de Lévy)**.** *Supongamos que $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y ϱ es una medida concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\varrho(dx) < \infty$. Sea*

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}\right) \varrho(dx), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sobre el cual está definido un proceso de Lévy con exponenete característico Ψ.

La prueba de este resultado es complicada y puede se revisada en [18].

Sin duda uno de los resultados fundamentales en la teoría de procesos de Lévy es la descomposición de estos en la suma de tres procesos independientes que a su vez son procesos de Lévy, formalmente.

Teorema 3.3 (Descomposición de Lévy Itô)**.** *Sean $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y ϱ una medida concentrada en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\varrho(dx) < \infty,$$

existe un espacio de probabilidad sobre el cual están definidos tres procesos de Lévy independientes $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$. Donde $X^{(1)}$ es un movimiento Browniamo con deriva,

$$X_t^{(1)} = \sigma B_t - at, \quad t \geq 0,$$

$X^{(2)}$ *es un proceso de Poisson compuesto,*

$$X_t^{(2)} \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t \geq 0$$

y $X^{(3)}$ *es una martingala cuadrado integrable con c.s. un número contable de saltos de longitud menor que la unidad sobre cada intervalo de tiempo finito con exponente característico*

$$\Psi^{(3)} = \int_{0<|x|<1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\varrho(dx).$$

Entonces, existe un espacio de probabilidad sobre el cual $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ *es un proceso de Lévy con exponente característico*

$$\Psi(\theta) = ai\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\varrho(dx), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

En nuestro estudio resultan importantes los "subordinadores", procesos de Lévy con trayectorias c.s. no-decrecientes que están caracterizados según el Lema 2.14 de [14] porque su coeficiente Gaussiano σ^2 es cero y su medida Lévy ϱ no carga $(-\infty, 0)$, además $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\varrho(dx) < \infty$ y el coeficiente de deriva o "drift"

$$d := -a - \int_{(0,1)} x\varrho(dx) \geq 0.$$

Además su exponente de Laplace está dado por

$$-\log \mathbb{E}\left(e^{-qX_1}\right) = \Phi(q) = dq + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx})\varrho(dx).$$

Definamos ahora el funcional exponencial

$$I_t := \int_0^t \exp(-X_s) ds, \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

y su valor terminal

$$I_\infty := \int_0^\infty \exp(-X_s) ds, \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Las condiciones que garantizan que $I_\infty < \infty$ se relacionan con la propiedades trayectoriales de X que como vimos, están dadas en términos de la distribucíon unidimensional de X o de su exponente característico.

Teorema 3.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) $I_\infty < \infty$ *c.s.*

(ii) $\mathbb{P}(I_\infty < \infty) > 0$.

(iii) X *deriva a* $+\infty$, *es decir,* $\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty$ *c.s.*

(iv) $\lim_{t\to\infty} t^{-1} X_t > 0$ *c.s.*

(v) $\int_1^\infty \mathbb{P}(X_t \leq 0)t^{-1}dt < \infty$.

(vi) *Se tiene que*

$$\int_{(-\infty,-1)} |x|\varrho(dx) < \infty \quad y \quad -a + \int_{|x|>1} |x|\varrho(dx) \in (0,\infty),$$

o bien,

$$\int_{(-\infty,-1)} |x|\varrho(dx) = \int_{(1,\infty)} = \infty \quad y \quad \int_1^\infty \varrho^-(x)d(x/J^+(x)) < \infty,$$

donde para cada $x > 0$

$$\varrho^+(x) = \varrho(x,\infty), \quad \varrho^-(x) = \varrho(-\infty,-x), \quad J^+(x) = \int_0^x \varrho^+(y)dy.$$

La prueba del Teorema anterior puede ser revisada en [4].

3.2 Cálculo de momentos enteros

Esta sección determinamos los momentos enteros de funcionales exponenciales cuando X es un subordinador y t es un tiempo exponencial independiente del proceso.

Lema 3.5. *Sea X un subordinador con exponente de Laplace Φ y T una variable aleatoria independiente de X con distribución exponencial de parámetro $r > 0$.*

(i) *Si $q > 0$ y $r + \Phi(q) > 0$, entonces*

$$\mathbb{E}\left(I_T^r\right) = \frac{q}{r + \Phi(q)} \mathbb{E}\left(I_T^{r-1}\right).$$

(ii) *Si $q \geq 1$ y $\Phi(q) > 0$, entonces*

$$\mathbb{E}\left(I_\infty^r\right) = \frac{q}{\Phi(q)} \mathbb{E}\left(I_\infty^{r-1}\right).$$

Prueba. Haciendo un cambio de variables se tiene que

$$-q\int_0^u (I_t - I_v)^{q-1} e^{X_v} dv = (I_t - I_u)^q - I_t^q, \quad u \leq t,$$

es decir,

$$(I_t - I_u)^q = I_t^q - q\int_0^u (I_t - I_v)^{q-1} e^{X_v} dv, \quad u \leq t.$$

Tomando $u = t$ en la igualdad anterior

$$I_t^q = q\int_0^t (I_t - I_v)^{q-1} e^{X_v} dv. \tag{3.5}$$

De nuevo por un cambio de variables

$$I_t - I_v = \int_0^{t-v} e^{X_{s+v}} ds = e^{X_v} \int_0^{t-v} e^{X_{s+v} - X_v} ds.$$

Recordando que X tiene incrementos independientes y estacionarios tenemos que $(X_{s+v} - X_v, s \geq 0)$ es independiente de $(X_s, s \leq v)$ y tiene la misma ley que $(X_s, s \geq 0)$, de aquí el término

$$\int_0^{t-v} e^{X_{s+v} - X_v} ds$$

es igual en ley a I_{t-v} y es independiente e^{X_v}, pues lo es de X_v. En consecuencia,

$$I_t - I_v \stackrel{\mathcal{L}}{=} e^{X_v} I_{t-v} \tag{3.6}$$

con e^{X_v} independiente de I_{t-v}. Luego aplicando el operador esperanza en (3.5) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_t^q) &= q \int_0^u dv \mathbb{E}\left[(I_t - I_v)^{q-1} e^{X_v}\right] \\ &= q \int_0^u dv \mathbb{E}\left(e^{qX_v} I_{t-v}^{q-1}\right) \\ &= q \int_0^u dv \mathbb{E}\left(e^{qX_v}\right) \mathbb{E}\left(I_{t-v}^{q-1}\right) \\ &= q \int_0^u dv e^{-v\Phi(q)} \mathbb{E}\left(I_{t-v}^{q-1}\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde para obtener la última igualdad hemos usado que Φ es el exponente de Laplace de X. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_T^q) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(I_T^q | T = t)\right] \\ &= r \int_0^\infty dt e^{-tr} \mathbb{E}(I_t^q) \qquad (3.8) \\ &= rq \int_0^\infty \int_0^t dv dt e^{-tr} e^{-v\Phi(q)} \mathbb{E}(I_{t-v}^{q-1}) \\ &= rq \int_0^\infty \int_v^\infty dt dv e^{-tr} e^{-v\Phi(q)} \mathbb{E}(I_{t-v}^{q-1}) \\ &= rq \int_0^\infty dv e^{-v\Phi(q)} \int_v^\infty dt e^{-rt} \mathbb{E}(I_{t-v}^{q-1}) \\ &= rq \int_0^\infty dv e^{-v\Phi(q)} \int_0^\infty dx e^{-r(x+v)} \mathbb{E}(I_x^{q-1}) \\ &= \frac{q}{\Phi(q) + r} \mathbb{E}(I_T^{q-1}). \end{aligned}$$

En (3.8) hemos usado que T es una v.a. con distribución exponencial de parámetro r e independiente de X. En las tres siguientes (3.7), el Teorema de Fubini y el cambio de variables $x = t - v$. La última se tiene por integración y (3.8).

Para verificar (3.5) realizamos el cambio de variables $q = rt$ en (3.8) obteniendo que

$$\mathbb{E}(I_T^q) = \int_0^\infty e^{-x}\mathbb{E}(I_{x/r}^q)dx.$$

Entonces por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\begin{aligned}\lim_{r\downarrow 0}\mathbb{E}(I_T^q) &= \int_0^\infty dxe^{-x}\mathbb{E}\left(\lim_{r\downarrow 0} I_{x/r}^q\right)\\ &= \int_0^\infty dxe^{-x}\mathbb{E}\left(I_\infty^q\right)\\ &= \mathbb{E}\left(I_\infty^q\right).\end{aligned}$$

Finalmente haciendo que r decrezca a cero en (3.5) se tiene (3.5). ■

Teorema 3.6. *La ley de I_∞ está determinada por la integral de sus momentos*

$$m_n := \mathbb{E}(I_\infty^n) = \frac{n!}{\Phi(1)\cdots\Phi(n)}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Más precisamente, si $0\le\alpha<\Phi(\infty)$ entonces

$$\mathbb{E}(e^{\alpha I_\infty})<\infty.$$

Prueba. La igualdad (3.9) se obtiene iterando (3.5). Ahora bien, $\Phi(q)$ es una función positiva creciente sobre $\mathbb{R}^+$ debido a que es el exponente de Laplace de un subordinador el cual es un proceso creciente. De aquí se sigue que si $\alpha<\Phi(\infty)$, entonces existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\Phi(n)>\alpha$ para $n>k$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=k+1}^\infty \frac{\alpha^n}{\prod_{j=1}^n\Phi(k)} &\le \sum_{n=k+1}^\infty \frac{\alpha^n}{\prod_{j=k+1}^n\Phi(k)}\\ &\le \alpha^k\sum_{n=k+1}^\infty\frac{\alpha^{n-k}}{\Phi^{n-k}(k+1)}\\ &= \alpha^k\sum_{j=1}^\infty\frac{\alpha^j}{\Phi^j(k+1)}<\infty\end{aligned}$$

y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^\infty\frac{s^n}{n!}m_n$ converge para $0\le\alpha<\Phi(\infty)$ y $\{m_n\}$ determina unívocamente la distribución de X, por el Teorema 3 del Capítulo 4 de [17]. Finalmente tenemos (3.6) recordando que cuando la función generadora de momentos $M(s)$ puede ser expresada en forma única como una expansión en serie de Taylor donde el coeficiente que acompaña al término $s^n/n!$ es justamente m_n. ■

Apéndice A

Convergencia de funciones de distribución

Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de funciones de distribución $\{F_n\}$ converja a una función de distribución (posiblemente no propia) es que la sucesión $\{\mathbb{E}_n(f)\}$ tenga límite finito para cada f continua que se que anula en el infinito (Capítulo VIII de [10]). Observemos que cuando $\{F_n\}$ está definida en $[0,1]$ es sufuciente con que f sea continua en $[0,1]$. Ahora recordando que el Teorema de Aproximación de Weierstrass establece que existe una sucesión de polinomios

$$f_n(x) = A_0^n + A_1^n x + \cdots, \;\; A_i^n \geq 0, \;\; 0 \leq x < 1,$$

tal que $f_n \to f$ uniformemente se sigue en este caso particular que la sucesión $\{F_n\}$ converge a un límite F si y sólo si para cada k la sucesión de momentos $\left\{\mathbb{E}_n\left(X^k\right)\right\}$ converge a un número μ_k. Más aún, μ_k es el k-ésimo momento de F, una función de distribución debido a que $\mu_0 = 1$.

Apéndice B

Sucesiones completamente monótonas

Sea $\{a_k\}$ una sucesión. Definimos el operador diferencia Δ como $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$. Al aplicar Δ por segunda vez se obtiene la sucesión con elementos

$$\Delta^2 a_i = \Delta a_{i+1} - \Delta a_i = a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i.$$

Procediendo de la misma forma se puede definir la r-ésima potencia Δ^r inductivamente por medio de $\Delta^r = \Delta\Delta^{r-1}$ de donde resulta que

$$\Delta^r a_i = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} a_{i+j}. \tag{B.1}$$

Por consistencia se define Δ^0 como el operador identidad.

Sean $\{a_k\}$ y $\{c_k\}$ sucesiones arbitrarias. Multiplicando por $\binom{v}{r} c_r$ y sumando sobre $r = 0, 1, ..., v$ en (B.1), obtenemos lo que se conoce como fórmula general de reciprocidad,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{v} \binom{v}{r} c_r \Delta^r a_i &= \sum_{r=0}^{v} \sum_{j=0}^{r} \binom{v}{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} c_r a_{i+j} \\
&= \sum_{j=0}^{v} \sum_{r=j}^{v} \binom{v}{j} \binom{v-j}{r-j} (-1)^{r-j} c_r a_{i+j} \\
&= \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} (-1)^{v-j} \sum_{k=0}^{v-j} \binom{v-j}{k} (-1)^{v-j-k} c_{j+k} a_{i+j}, \\
&= \sum_{j=0}^{v} a_{i+j} \binom{v}{j} (-1)^{v-j} \Delta^{v-j} c_j, \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad hemos hecho $k = r - j$ en el coeficiente de a_{i+j}.

Definición B.1. *Una sucesión $\{c_k\}$ es completamente monótona si*

$$(-1)^r \Delta^r c_k \geq 0, \quad r = 0, 1, 2...$$

Observe que c_i es una sucesión cuyas diferencias alternan en signo.

Denotamos $\Delta_h = \frac{\Delta}{h}$,similarmente que en (B.1)

$$\Delta_h^r u(x) = \frac{1}{h^r} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} u(x+jh). \tag{B.3}$$

Consideremos una función de distribución de probabilidad F concentrada en $[0,1]$ con c_k es k-ésimo momento. Entonces,

$$\begin{aligned}
(-1)^{r-k}\Delta^{r-k}c_k &= (-1)^{r-k}\sum_{j=0}^{r-k}\binom{r-k}{j}(-1)^{r-k-j}\mathbb{E}(X^{k+j}) \\
&= \mathbb{E}\left[(-1)^{r-k}\sum_{j=0}^{r-k}\binom{r-k}{j}(-1)^{r-k-j}X^{k+j}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^k(-1)^{r-k}\sum_{j=0}^{r-k}\binom{r-k}{j}(-1)^{r-k-j}X^{j}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^k(-1)^{r-k}(-1+X)^{r-k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^k(1-X)^{r-k}\right] \geq 0,
\end{aligned} \tag{B.4}$$

es decir, la sucesión de momentos es completamente monótona.

Ahora por el Teorema de Aproximación de Bernstein sabemos que para una función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_\epsilon$, entonces para todo $x \in [0,1]$,

$$|u(x) - B_{n,u}(x)| < \epsilon, \tag{B.5}$$

donde

$$B_{n,u}(x) = \sum_{k=0}^{n} u\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}. \tag{B.6}$$

Definiendo

$$P_k^n = \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Delta^{n-k}c_k$$

se sigue por (B.4) y (B.6) que

$$\mathbb{E}(B_{n,u}) = \sum_{k=0}^{n} u\left(\frac{k}{n}\right) P_k^n.$$

Notemos que cuando $u(x) = 1$ en (B.6), $B_{n,u}(x) = 1$ para cada x. En consecuencia para cada n, P_k^n define una función de distribución F_n que asigna al valor k/n una probabilidad de P_k^n, $k = 0, 1, ..., n$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n(u) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(B_{n,u}) = \mathbb{E}(u),$$

ya que $\{B_{n,u}(x)\}_n$ converge uniformemente a $u(x)$, por el Teorema de Aproximación de Bernstein.

Observe que la sucesión completamente monótona $\{c_k\}$ corresponde a la sucesión de momentos asociada a una función de distribución F dada. Ahora supongamos que $\{c_k\}$ cualquier sucesión completamente monótona tal que $c_0 = 1$. Sea $a_j = u(jh)$, entonces por la fórmula general de reciprocidad con $i = 0$,

$$\sum_{r=0}^{n} c_r \binom{n}{r} \Delta^r u(0) = \sum_{k=0}^{n} u(kh) \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta^{n-k} c_k.$$

De (B.1) y (B.3),

$$\Delta_h^r u(0) = \frac{1}{h^r} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} u(jh) = \frac{1}{h^r} \Delta^r u(0).$$

Luego,

$$\sum_{r=0}^{n} c_r \binom{n}{r} h^r \Delta_h^r u(0) = \sum_{k=0}^{n} u(kh) \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta^{n-k} c_k.$$

Definiendo a P_k^n como antes,

$$\sum_{r=0}^{n} c_r \binom{n}{r} h^r \Delta_h^r u(0) = \sum_{k=0}^{n} u(kh) P_k^n,$$

de modo que tomando $u(x) = 1$ y $h = 1/n$ en la igualdad anterior tenemos que para cada n, tenemos una función de distribución F_n que que toma el valor k/n con probabilidad P_k^n, $k = 0, 1, .., n$. Así una sucesión completamente monótona $\{c_k\}$ define una función de distribución F_n concentrada en $[0, 1]$ tal que

$$\mathbb{E}_n(u) = \sum_{r=0}^{n} c_r \binom{n}{r} \left(\frac{1}{n}\right)^r \Delta_h^r u(0).$$

Ahora con u un polinomio de grado N, de la definición de derivada y la del operador Δ_h^r se sigue por inducción sobre r que

$$\lim_{h \to 0} \Delta_h^r u(0) = u^r(0).$$

Luego observando que u tiene a lo más N derivadas tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_n(u) = \sum_{k=0}^{N} \frac{c_r}{r!} u^{(r)}(0),$$

pues además,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{n^r} = 1.$$

Finalmente eligiendo $u(x) = x^r$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_n(X^r) = c_r,$$

es decir, el r-ésimo momento de F_n converge a c_r.

Así hemos probado que para una sucesión completamente monótona $\{c_k\}$ sujeta a la condición de que $c_0 = 1$ existe una sucesión $\{F_n\}$ de funciones de distribución cuyo k-ésimo momento converge a c_k. Más aún por el Apéndice A, si $\{c_k\}$ es una sucesión completamente monótona tal que $c_0 = 1$ existe una función de distribución F cuyo k-ésimo momento converge a c_k, ya que las F_n's están concentradas en $[0, 1]$.

Apéndice C

Cálculos

El exponente de Laplace de un subordinador sin deriva y función de densidad dada por (2.34) es

$$
\begin{aligned}
\Phi(y) &= \frac{\lambda}{c\beta^2\Gamma(1-\lambda)} \int_0^\infty (1-e^{-xy}) \frac{e^{x(1-v)/\beta}}{(e^{x/\beta}-1)^{\lambda+1}} dx \\
&= \frac{\lambda}{c\beta\Gamma(1-\lambda)} \int_0^\infty (1-e^{-\beta yz}) \frac{e^{z(1-v)}}{(e^{z}-1)^{\lambda+1}} dz \\
&= \frac{1}{c\beta\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 x^v(1-x^{\beta y}) \frac{\lambda}{x^2} \left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda-1} dx \\
&= -\frac{v}{c\beta\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 x^{v+\lambda-1}(1-x)^{-\lambda} dx + \frac{v+\beta y}{c\beta\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 x^{v+\lambda+\beta y-1}(1-x)^{-\lambda} dx \\
&= -\frac{v}{c\beta\Gamma(1-\lambda)} \frac{\Gamma(v+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(v+1)} + \frac{v+\beta y}{c\beta\Gamma(1-\lambda)} \frac{\Gamma(v+\beta y+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(v+\beta y+1)} \\
&= \frac{\Gamma(v+\beta y+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(v+\beta y+1)} \frac{v+\beta y}{c\beta\Gamma(1-\lambda)} - \frac{\Gamma(v+\lambda)}{c\beta\Gamma(v)}
\end{aligned}
$$

Hemos hecho respectivamente los cambios de variables $z = x/\beta$ y $x = e^{-z}$. En la cuarta igualdad aplicamos integración por partes con

$$
u = x^v(1-x^{\beta y}), \quad dv = \frac{\lambda}{x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda-1} dx,
$$

de aquí

$$
v = \left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda}, \quad du = vx^{v-1} - (v+\beta y)x^{v+\beta y-1}.
$$

Además hemos usado que $uv = 0$ ya que por la Regla de L'Hopital y el hecho de que $\lambda \in (0,1)$

$$
\lim_{x\to 1} x^v(1-x^{\beta y})\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda} = \lim_{x\to 1} \frac{[x^{v+\lambda}(1-x^{\beta y})]'}{\lambda(1-x)^{\lambda-1}} = 0.
$$

Bibliografía

[1] Aldous D. J. “Exhangeability and Related Topics”. In P. Hennequin, editor, Ecole d’été de probabilitiés de Saint-Flour, XIII 1983, pages 1-198. Springer, Berlin. Lecture Notes in Mathematics 117 (2009).

[2] Berestycki N. “Recent Progress in Coalescent Theory”. Ensaios Matemáticos 200X, Volume XX, X-XX.

[3] Bertoin J. “Random Fragmentation and Coagulation Processes”. Cambridge Studies in Advanced Mathematics (2006).

[4] Bertoin J. and Yor M. “Exponential Functionals of Lévy Processes”. Probability Surveys (2004).

[5] Bertoin J. and Le Gall J. F. “The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes”. Probab. Theory Relat. Fields 117 (2000), 249-266.

[6] Bolthausen E. and Sznitman A. S. “On Ruelle’s probability cascades and an abstract cavity method”. Comm. Math. Physics 197 (1998), 247-276.

[7] Carmona P., Petit F. and Yor M. “On the Distribution and Asymptotic Results for Exponential Functionals of Lévy Processes”. In Exponential Functionals an Principal Values Related to Brownian Motion, ed. M. Yor, Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, pp. 73-121.

[8] Chung K. L. “A Course in Probability Theory”. Academic Press.

[9] Durrett R. “Probability: theory and examples”. Duxubury advanced series, 3^{rd} edition (2004).

[10] Feller W. “An Introduction to Probability Theory and Its Aplications”, Volume 2. Wiley, New York. (1966).

[11] Kallenberg O. “Foundations of Modern Probability”. Springer. Second Edition (2002).

[12] Kingman J.F.C. “The Coalescent”. Stoch. Process. Appl. 13, 235-248 (1982).

[13] Kingman J.F.C. “On the Genealogy of Large Populations”. In Essays in Statistical Science (J. Appl. Prob. Spec. Vol. 19A), eds J. Gani and E. J. Hannan, Applied Probability Trust, Sheffield, pp. 27-43 (1982).

[14] Kyprianou A. E. “Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications”.

[15] Möhle M. “On the Number of Segregating Sites for Populations with Large Family Sizes”. Adv. Appl. Prob. 38, 750-767 (2006).

[16] Pitman J. “Coalescents with Multiple Collisions”. Ann Probab. 27, 1870-1902 (1999).

[17] Rohatgi V. K. “An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics”. John Wiley and Sons. (1976)

[18] Sato K.-I. “Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions”. Cambridge University Press (1999).

[19] Schneider W.R. “Completely Monotone Generalized Mittag-Leffler Functions”. Expo. Math. 14, 3-16 (1996).