CIMAT

Centro de Investigación en
Matemáticas A.C.

Sistemas Dinámicos Aleatorios y sus Atractores

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en ciencias

con Especialidad en

Probabilidad y Estadística

P R E S E N T A:

Eugenio Guerrero Ruiz

Director de Tesis:

Dr. José Alfredo López Mimbela

GUANAJUATO, GTO AGOSTO 2013

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Sistemas Dinámicos Aleatorios y sus Atractores

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Especialidad en

Probabilidad y Estadística

P R E S E N T A:

Eugenio Guerrero Ruiz

Comité de Evaluación:

Dr. Antonio Murillo Salas
(Presidente)

Dr. Julio César García Corte
(Secretario)

Dr. José Alfredo López Mimbela
(Director de Tesis)

GUANAJUATO, GTO AGOSTO 2013

Agradecimientos

A mis padres y a mi hermano, por su apoyo en cada proyecto que llevo a cabo.

A Daniela y mis amigos, por todos los buenos y duros momentos durante mi estancia en México.

A mi asesor de tesis, el Dr. José Alfredo López Mimbela, por su apoyo durante el desarrollo del presente trabajo. De igual forma, dirijo un especial agradecimiento al CONACYT, por brindarme la beca que fue el sustento para mi grata estancia en México, a lo largo de esta parte de mi formación.

Al CIMAT, que a través de sus espacios, me permitió crear un ambiente agradable para el estudio y el intercambio cultural.

Para finalizar, hago mención que este trabajo forma parte del proyecto CONACYT No. 157772, Sistemas Estocásticos No Lineales , dirigido por el Dr. José Alfredo López Mimbela.

Resumen

Existen diferentes definiciones no equivalentes del concepto de atracción en un Sistema Dinámico Aleatorio (SDA). Para ejemplificar las diferencias entre estos conceptos, se establecen condiciones suficientes para la existencia de un SDA generado por una ecuación diferencial estocástica de Stratonovich.

Asimismo, existen diferentes tipos de atractor, a partir de lo cual, se establecen condiciones suficientes y necesarias para la existencia de un atractor de un SDA, y en particular se encuentra un atractor global para el SDA generado por una ecuación diferencial de reacción-difusión.

Introducción

Mientras que el concepto de atractor de un sistema dinámico determinista ha sido ampliamente estudiado, lo mismo no ha ocurrido con la noción de atractor de un *sistema dinámico aleatorio*, el cual ha ganado considerablemente la atención desde la década de los 90's. El estudio del comportamiento asintótico de un sistema dinámico aleatorio fue inicialmente abordado desde el punto de vista de los atractores globales, introducidos por Crauel y Flandoli [5] en 1994, en un artículo sobre atractores aleatorios, y su teoría se basa en el caso determinista.

Crauel y Flandoli exponen, como uno de los principales inconvenientes cuando se incorpora aleatoriedad a un sistema dinámico, el hecho que los conjuntos acotados del espacio de estados no permanecen invariantes en el sentido usual de la palabra, es decir, si la dinámica inicia en algún punto de un subconjunto del espacio de estados, con el paso del tiempo se "saldrá" de dicho conjunto de manera casi segura. Por esta razón, los autores definen el concepto fundamental que permitió, en años posteriores, revolucionar la teoría de sistemas dinámicos aleatorios; el concepto de *atractor global*, el cual, de manera intuitiva, es un conjunto que depende de la aleatoriedad del sistema; cambia con el tiempo pero de manera estacionaria y además *atrae* todas las trayectorias de la dinámica provenientes del tiempo $-\infty$ (por esta razón, estos conjuntos también son llamados atractores hacia atrás). Si bien otros autores como Brzezniak, Capinski y Flandoli [7] habían considerado atractores para la trayectorias del sistema en tiempo ∞, la ventaja de trabajar con atractores para el comportamiento en $-\infty$ es que estos permiten considerar sistemas con ruido blanco "real", y no solamente el ruido blanco definido para tiempo positivo. Por otra parte, los autores demuestran la existencia de un atractor global para una gran variedad de sistemas dinámicos, en particular los generados por *ecuaciones diferenciales estocásticas de reacción-difusión*.

Posterior al trabajo de Crauel y Flandoli, en 1995 se publica el artículo de los mismos autores en compañía de Debussche [6], en el que dan otros ejemplos de aplicación a las ecuaciones de Navier–Stokes, para lo cual adaptan los conceptos anteriores a dicho ejemplo y presentan los alcances de su metodología.

En la actualidad, el estudio de los atractores se enfoca en el tipo de dinámica involucrada en el sistema. Los modelos que han sido estudiados de manera más profunda abarcan las ecuaciones del tipo reacción-difusión, las ecuaciones de Nevier-Stokes y el oscilador de Duffing-van del Pol. Entre las ecuaciones de reacción-difusión, ampliamente estudiadas por Teman [19], se encuentran los casos cuando se introduce ruido blanco aditivo y ruido blanco multiplicativo. En el primero, el coeficiente de difusión depende del espacio de estados, mientras que en el segundo, dicho coeficiente depende del espacio de estados pero a través del estado actual. Ambos casos han sido estudiados por Crauel y Flandoli [5], basados en las ideas de Teman. Sin embargo existe un inconveniente en la presentación de Crauel y Flandoli [5]: puesto que los conceptos de atracción están dados en el tiempo de manera que se analiza el comportamiento del flujo desde $-\infty$, se debe trabajar con espacios apropiados en los que tenga sentido hablar del tiempo negativo.

Por otra parte, Ochs [11] estudió los atractores desde el punto de vista de la atracción débil. En su trabajo, Ochs redefine el concepto de atracción debilitando la condición que la atracción sea en casi todo punto y propone el concepto de *atracción en probabilidad.* Si bien los atractores fuertes son también débiles, el interés de Ochs radica en encontrar condiciones para que la atracción débil implique la atracción fuerte.

En este trabajo se presenta de manera detallada los diferentes conceptos de atracción que aparecen en la literatura, en el contexto de los sistemas dinámicos aleatorios, al tiempo que se discuten las diferencias sutiles entre estos conceptos, a través de una clase particular de sistemas dinámicos aleatorios 1-dimensionales, los cuales son generados por *ecuaciones diferenciales estocásticas de Stratonovich.* Asimismo, se busca comprender y ganar intuición en el manejo de dichas nociones. Aunque Scheutzow [16] realizó un estudio comparativo entre estos conceptos, en el presente trabajo se dan de manera más profunda varios argumentos omitidos por el autor en su artículo.

La organización de este trabajo es la siguiente. En el Capítulo 1 se presentan los conceptos de sistema dinámico aleatorio, conjunto aleatorio, atracción fuerte, débil y absorción. Posterior a esto, se define el concepto de Ω-límite de un conjunto aleatorio y el concepto de atractor global, ligando dichos resultados a través de un resultado fundamental de la teoría de atractores: todo sistema dinámico aleatorio que posea un conjunto aleatorio compacto que atraiga todos los subconjuntos acotados del espacio de estados, tiene un atractor global. Después, se define el concepto de medida invariante para el flujo de un sistema; se establece su relación con las probabilidades de transición y se demuestra que dichas medidas, en caso de existir, están soportadas en un atractor global. Para ejemplificar lo anterior, se desarrolla con base a Crauel y Flandoli [5], un ejemplo de una ecuación de reacción-difusión perturbada por un ruido aditivo, en el cual se garantiza la existencia de un atractor global para el flujo generado por el sistema. Al finalizar el capítulo, se profundiza en los conceptos de atractor fuerte y atractor débil, dando para cada uno de ellos, condiciones suficientes y necesarias para garantizar su existencia en sistemas dinámicos aleatorios.

En el Capítulo 2 se desarrolla la teoría básica para garantizar la existencia del flujo en ecuaciones diferenciales estocásticas de Stratonovich. Para esto, se incluye una exposición sistemática del cálculo estocástico para semimartingalas con parámetro de tiempo $t \in \mathbb{R}$, basando los argumentos en Arnold y Scheutzow [15], el libro de Arnold [1] y el libro de Kunita [9]. Con esto en mente, se desarrolla parte de la teoría de *semimartingalas hélices*, las cuales toman valores en un grupo abeliano (en particular $(\mathbb{R}, +)$) y se obtienen propiedades sobre las características locales de las mismas. Usando la definición de la integral estocástica de Stratonovich, se dan condiciones suficientes para que dicho tipo de ecuaciones posean una solución única fuerte (salvo indistinguibilidad) la cual cumple con las propiedades de ser una semimartingala *cociclo* y de generar un sistema dinámico aleatorio.

En el apartado de Comentarios Finales se comparan las diferentes definiciones de atractores dadas a lo largo de este trabajo, por medio de un sistema particular de sistemas dinámicos aleatorios, a saber, los generados por una ecuación de tipo de difusión en el sentido de Stratonovich (cuya existencia se garantiza en el Capítulo 2). Los ejemplos que aquí se exponen se encuentran en Scheutzow [16], y permiten resaltar el interés del autor por mostrar la no equivalencia de las diferentes nociones de atracción que existen en la literatura.

Como trabajo pendiente, queda buscar diferentes ejemplos que ilustren el concepto de atracción sobre compactos, y profundizar en otros aspectos importantes en la teoría de sistemas dinámicos, como son las propiedades ergódicas y los isomorfismos entre dinámicas.

Por último, cabe destacar que el estudio de los atractores aleatorios es de importancia porque permite analizar el comportamiento asintótico de la dinámica aleatoria asociada. Si bien en este trabajo no se hace modelación estocástica mediante alguna dinámica aleatoria particular, sirve como base para entender algunos fundamentos teóricos necesarios para hacer aplicaciones.

Contenido

Capítulo 1
Sistemas dinámicos aleatorios y sus atractores

§1.1 Introducción

De manera intuitiva, un sistema dinámico determinista es una descripción funcional de la solución a un problema físico, o un modelo matemático que describe dicho problema a través de una variable temporal. En este mismo contexto, el concepto de atractor puede interpretarse como un conjunto que "atrae" al flujo del sistema. Sin embargo, cuando se estudian los sistemas dinámicos aleatorios, hay varias nociones no equivalentes del concepto de atractor aleatorio: el concepto más cercano al del caso determinista es el de atractor hacia adelante, dado por ejemplo en Arnold [1]; en los trabajos de Crauel y Flandoli [5], y en el de Schmalfuss [17] se da la definición de atractor fuerte; por último, están los atractores débiles, introducidos y estudiados por Ochs [11]. Otra clase de atractores estudiados en la literatura son los atractores globales, los cuales a su vez han sido definidos de manera diferente dependiendo del tipo de aplicación.

El objetivo principal del presente capítulo es definir a los sistemas dinámicos aleatorios y sus correspondientes atractores; mostrar algunas de las propiedades mas importantes que poseen los diferentes tipos de atractores, y garantizar, bajo ciertas condiciones, la existencia de atractores globales y medidas invariantes soportadas en dichos atractores.

En las primeras tres secciones se introducen los conceptos de atracción, absorción, atractor global y medida invariante, al tiempo que se ejemplifican estos conceptos en un sistema dinámico generado por una ecuación de reacción-difusión. En la Sección §1.4 se definen los atractores fuertes y débiles y se establecen condiciones suficientes y necesarias para su existencia.

§1.2 Sistemas dinámicos aleatorios

A continuación se introducen los conceptos de sistema dinámico medible, métrico y aleatorio. En cualquier caso, el conjunto $\mathbb{T}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$.

Las nociones aquí presentadas se basan el libro de Arnold [1] y el artículo de Crauel y Flandoli [5].

Definición 1.2.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Para cada $t \in \mathbb{T}$, sea $\vartheta_t : \Omega \to \Omega$ una transformación. Se define $T : \mathbb{T}\times\Omega \to \Omega$ como $T(t,\omega) = \vartheta_t(\omega)$. Si T es $\mathcal{B}(\mathbb{T})\otimes\mathcal{F}/\mathcal{F}$-medible y

1. $\vartheta_0(\cdot) = \mathrm{id}_\Omega(\cdot)$,

2. $\vartheta_s(\vartheta_t(\omega)) = \vartheta_{s+t}(\omega)$, para cualesquiera $s, t \in \mathbb{T}$, $\omega \in \Omega$, (**propiedad de ciclo**),

entonces $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ se llama *sistema dinámico medible* sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 1.2.2. Sea $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ un sistema dinámico medible en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que ϑ_t es, para cualquier $t \in \mathbb{T}$, una *transformación que preserva a* $\mathbb{P}$ [1], es decir, $\mathbb{P}\left(\vartheta_t^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}(A)$ (o también denotado por $\vartheta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$) para todo $A \in \mathcal{F}$. Entonces $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ se llama *flujo en* Ω *con tiempo en* $\mathbb{T}$ y $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}\right)$ se dice que es un *sistema dinámico métrico*.

Por ejemplo, sea $\Omega = \{x_0, \dots, x_n\}$, $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$ y $\mathbb{P}$ la probabilidad uniforme en Ω. Se define $\vartheta_0(\cdot) = \mathrm{Id}_\Omega(\cdot)$ y $\vartheta(x_i) = x_{i+1}$, donde los índices se toman módulo n. Para cada $t \in \mathbb{T} = \mathbb{Z}$, sea

$$\vartheta_t := \underbrace{\vartheta \circ \cdots \circ \vartheta}_{t-\text{veces}}$$

donde $\circ$ denota la operación de composición. Entonces $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}\right)$ es un sistema dinámico métrico.

Definición 1.2.3. Sea (E, d_E) un espacio métrico, completo y separable (llamado *espacio de estados* o *componente espacial*), y $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}\right)$ un sistema dinámico métrico. Sea $\varphi : \mathbb{T} \times \Omega \times E \to E$ una función medible respecto a $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)/\mathcal{B}(E)$ tal que

1. $\varphi(0, \omega, \cdot) = \mathrm{id}_E(\cdot)$ para todo $\omega \in \Omega$,

2. $\varphi(s + t, \omega, x) = \varphi(t, \vartheta_s(\omega), \varphi(s, \omega, x))$, para cualesquiera $s, t \in \mathbb{T}$, $\omega \in \Omega$ y $x \in E$, (**propiedad de cociclo**),

entonces $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \varphi\right)$ es llamado *sistema dinámico aleatorio*[2] sobre (E, d_E), el cual se denotará por (ϑ, φ).

Nótese que sobre el supuesto que $\mathbb{T}$ es o bien $\mathbb{R}$ o bien $\mathbb{Z}$, se deduce que $\varphi^{-1}(t, \omega, \cdot) = \varphi(-t, \vartheta_t(\omega), \cdot)$, para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$.

[1] también se dice que $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ es *invariante para* $\mathbb{P}$.

[2] Los acrónimos SDM y SDA representan respectivamente sistema dinámico métrico y sistema dinámico aleatorio.

§1.3 Atractores globales para SDA's

En esta sección se desarrolla parte de la teoría de atractores globales. Si bien la teoría de atractores para sistemas dinámicos deterministas ha sido ampliamente estudiada por Temam [19], el caso estocástico presenta varios inconvenientes técnicos: en particular, cuando el sistema dinámico es perturbado por un ruido blanco aditivo, no hay forma que que los conjuntos acotadas del espacio de estados permanezcan invariantes. En general, el ruido blanco hace que las trayectorias del sistema "abandonen", eventualmente, cualquier conjunto acotado. De esta forma, los conjuntos invariantes que se definen en el caso estocástico, se mueven con la solución a medida que pasa el tiempo, y están influenciados por la aleatoriedad del sistema. Sin embargo, estos cambios se dan de una manera estacionaria, es decir, desde el punto de vista probabilístico, un conjunto invariante no cambia con el tiempo.

Entre los resultados importantes de esta sección, se demuestra la existencia de un atractor global para un SDA, y se establecen condiciones para la existencia de una medida de Markov invariante, soportada en un atractor global.

Durante este capítulo, se supondrá que (ϑ, φ) es un SDA sobre un espacio métrico, completo y separable (E, d_E) (también llamado espacio polaco) y que el mapeo $\varphi(\cdot, \omega, \cdot) : \mathbb{R}\times E \to E$ dado por $(t, x) \mapsto \varphi(t, \omega, x)$ es continuo para todo $\omega \in \Omega$. En algunas ocasiones se dirá que el SDA (ϑ, φ) sobre el espacio $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ dotado de la métrica euclidiana inducida por la norma euclidiana $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ en $\mathbb{R}^n$, es de *clase* $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, si para todo $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$, el mapeo $\varphi(t, \omega, \cdot) : E \to E$, tal que $x \mapsto \varphi(t, \omega, x)$ tiene derivadas hasta de orden k, y además la derivada de orden k es continua en $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ para todo $\omega \in \Omega$.

Se define la seudométrica de Hausdorff como

$$d(A, B) := \sup_{x\in A} \left\{ \inf_{y\in B} \{d_E(x, y)\} \right\}, \quad \text{para cualesquiera } A, B \subseteq E.$$

Por simplicidad en la notación, se escribe $d(\{x\}, A) := d(x, A)$ para todo $x \in E$ y todo $A \subseteq E$. Nótese que la continuidad de la aplicación $a \mapsto d(x, a)$ implica que $d(A, B) = d\left(\bar{A}, B\right)$ y para A cerrado en E, $d(A, B) = 0$ si y solo si $A \subseteq B$. Para cada $\delta > 0$, la *δ-vecindad abierta* de A es denotada por

$$\begin{aligned} A^\delta &:= \{x \in X : d(x, A) < \delta\} = \{x \in X : d(x, a) < \delta \text{ para algún } a \in A\} \\ &= \left\{x \in X : B_x^\delta \cap A \neq \emptyset\right\}, \end{aligned}$$

donde $B_x^\delta := \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$.

1.3.1 Conceptos de atracción y absorción

Definición 1.3.1. Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E). Sea $\mathscr{A} : \Omega \to \wp(E)$, una aplicación tal que el conjunto

$$A = \{(\omega, x) \in \Omega \times E : x \in \mathscr{A}(\omega)\}$$

es medible respecto a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$. Entonces la familia $\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es llamada *conjunto aleatorio.* Si para cada $\omega \in \Omega$, $\mathscr{A}(\omega)$ es un subconjunto compacto (cerrado) de E y la aplicación $\omega \mapsto d(x, \mathscr{A}(\omega))$ es medible respecto a $\mathcal{F}$ para todo $x \in E$, entonces la familia $\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es llamada *conjunto aleatorio compacto (cerrado).* Si $\varphi(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)) = \mathscr{A}(\vartheta_t(\omega))$, (respc. $\varphi(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)) \subseteq \mathscr{A}(\vartheta_t(\omega)))$ para todo $t \geq 0$ y casi todo $\omega \in \Omega$, el conjunto aleatorio $\mathscr{A} \equiv \{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$[3] es llamado *invariante (*respc. *débilmente invariante)* respecto a φ.

Definición 1.3.2. Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E). Dado un conjunto aleatorio $\mathscr{A}$, el conjunto

$$\Omega_{\mathscr{A}}(\omega) := \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{A}(\vartheta_{-t}(\omega)))}$$

es llamado Ω-*límite de* $\mathscr{A}$.

A partir de la definición anterior se tiene la siguiente caracterización:

$$\Omega_{\mathscr{A}}(\omega) = \left\{ y \in E : \exists t_n \to \infty, \exists x_n \in \mathscr{A}(\vartheta_{-t_n}(\omega)), \lim_{n\to\infty} d(\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n), y) = 0 \right\}.$$

En efecto, denótese por D al conjunto del lado derecho de la anterior igualdad. Entonces $y \in \Omega_{\mathscr{A}}(\omega)$ si solo si para todo $T \geq 0$,

$$y \in \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{A}(\vartheta_{-t}(\omega)))},$$

es decir, para todo $T \geq 0$ existen $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}(\vartheta_{-t_n}(\omega))$ (que dependen de T) con $t_n \geq T$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para las cuales

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n), y) = 0.$$

Tomando T arbitrariamente grande, en particular debe cumplirse que

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n), y) = 0,$$

para alguna sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y alguna sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}(\vartheta_{-t_n}(\omega))$, de lo que se sigue que $\Omega_{\mathscr{A}}(\omega) \subseteq D$. La otra contención se sigue de la definición.

En la definición anterior, si $\mathscr{A}$ tiene como imagen un único conjunto $A \subseteq E$, simplemente se denota $\Omega_A(\omega) = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), A)}$. Además, cuando se escriba $\mathscr{A}$ se entenderá como una aplicación $\mathscr{A} : \Omega \to \wp(E)$ a menos que se especifique algo más.

Lema 1.3.3. *Sea $\mathscr{A}$ un conjunto aleatorio. Si (ϑ, φ) es un SDA sobre (E, d_E), entonces $\Omega_{\mathscr{A}}(\omega)$ es débilmente invariante respecto a φ.*

[3]Por simplicidad de notación, la imagen de la aplicación $\mathscr{A}$ es denotada por $\mathscr{A}$.

Demostración. Para cada $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi\left(t,\omega,\Omega_{\mathscr{A}}\left(\omega\right)\right) &= \varphi\left(t,\omega,\bigcap_{T\geq 0}\overline{\bigcup_{s\geq T}\varphi\left(s,\vartheta_{-s}\left(\omega\right),\mathscr{A}\left(\vartheta_{-s}\left(\omega\right)\right)\right)}\right)\\ &\subseteq \bigcap_{T\geq 0}\varphi\left(t,\omega,\overline{\bigcup_{s\geq T}\varphi\left(s,\vartheta_{-s}\left(\omega\right),\mathscr{A}\left(\vartheta_{-s}\left(\omega\right)\right)\right)}\right)\\ &\subseteq \bigcap_{T\geq 0}\overline{\bigcup_{s\geq T}\varphi\left(t,\omega,\varphi\left(s,\vartheta_{-s}\left(\omega\right),\mathscr{A}\left(\vartheta_{-s}\left(\omega\right)\right)\right)\right)},\end{aligned}$$

donde las contenciones se dan pues $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)\subseteq\bigcap_{\gamma\in\Gamma}f\left(A_\gamma\right)$ y $f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f\left(A_\gamma\right)$ para cualquier familia $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ contenida en el dominio de f . Además $f\left(\bar{A}\right)\subseteq\overline{f\left(A\right)}$ para cualesquier subconjunto del dominio de f. De esta forma, la propiedad de cociclo implica que:

$$\begin{aligned}\varphi\left(t,\omega,\Omega_{\mathscr{A}}\left(\omega\right)\right) &\subseteq \bigcap_{T\geq 0}\overline{\bigcup_{s\geq T}\varphi\left(t+s,\vartheta_{-s}\left(\omega\right),\mathscr{A}\left(\vartheta_{-s}\left(\omega\right)\right)\right)}\\ &= \bigcap_{T\geq 0}\overline{\bigcup_{s\geq T}\varphi\left(t+s,\vartheta_{-(t+s)}\left[\vartheta_t\left(\omega\right)\right],\mathscr{A}\left(\vartheta_{-(t+s)}\left[\vartheta_t\left(\omega\right)\right]\right)\right)}\\ &= \bigcap_{T\geq 0}\overline{\bigcup_{u\geq T+t}\varphi\left(u,\vartheta_{-u}\left[\vartheta_t\left(\omega\right)\right],\mathscr{A}\left(\vartheta_{-u}\left[\vartheta_t\left(\omega\right)\right]\right)\right)}\\ &= \bigcap_{T\geq t}\overline{\bigcup_{u\geq T}\varphi\left(u,\vartheta_{-u}\left[\vartheta_t\left(\omega\right)\right],\mathscr{A}\left(\vartheta_{-u}\left[\vartheta_t\left(\omega\right)\right]\right)\right)} = \Omega_{\mathscr{A}}\left(\vartheta_t\left(\omega\right)\right). \blacksquare\end{aligned}$$

Definición 1.3.4. Sea (ϑ,φ) un SDA sobre (E,d_E). Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son conjuntos aleatorios tales que para casi todo $\omega\in\Omega$

$$\lim_{t\to\infty} d\left(\varphi\left(t,\vartheta_{-t}\left(\omega\right),\mathscr{B}\left(\vartheta_{-t}\left(\omega\right)\right)\right),\mathscr{A}\left(\omega\right)\right)=0,$$

entonces se dice que $\mathscr{A}$ *atrae fuertemente* a $\mathscr{B}$. Si el límite anterior se da en probabilidad, se dice que $\mathscr{A}$ *atrae débilmente* a $\mathscr{B}$.

Cuando $B\subseteq E$ es no aleatorio, se dice que $\mathscr{A}$ *atrae fuertemente* a B si para casi todo $\omega\in\Omega$,

$$\lim_{t\to\infty} d\left(\varphi\left(t,\vartheta_{-t}\left(\omega\right),B\right),\mathscr{A}\left(\omega\right)\right)=0.$$

Análogamente se define que $\mathscr{A}$ *atrae débilmente* a B. Estos conceptos de atracción serán estudiados con mayor profundidad en la Sección §1.4.

En el contexto de la definición anterior, si $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$, entonces del hecho que $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ preserve a $\mathbb{P}$ se sigue que

$$\mathbb{P}-\lim_{t\to\infty} d\left(\varphi\left(t,\omega,\mathscr{B}\left(\omega\right)\right),\mathscr{A}\left(\vartheta_t\left(\omega\right)\right)\right)=0.$$

Además, si $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$ y para casi todo $\omega\in\Omega$ se cumple que $\mathscr{A}\left(\omega\right)\subseteq\mathscr{A}'\left(\omega\right)$, entonces $\mathscr{A}'$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$, lo cual se obtiene del hecho que la seudométrica de Hausdorff es tal que si $A\subseteq A'\subseteq E$ entonces $d\left(B,A'\right)\leq d\left(B,A\right)$, para todo $B\subseteq E$.

Definición 1.3.5. Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E). Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son conjuntos aleatorios tales que para casi todo $\omega \in \Omega$ existe $t(\omega) \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \geq t(\omega)$

$$\varphi\left(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{B}\left(\vartheta_{-t}(\omega)\right)\right) \subseteq \mathscr{A}(\omega),$$

entonces se dice que $\mathscr{A}$ *absorbe* a $\mathscr{B}$; si $t_{\mathscr{B}}(\omega) := \operatorname{ínf} t(\omega)$ donde el ínfimo es tomado sobre aquellos tiempos aleatorios $t(\omega)$ para los cuales $\mathscr{A}$ absorbe a $\mathscr{B}$, entonces $t_{\mathscr{B}}(\omega)$ es llamado *tiempo de absorción*.

Cuando $B \subseteq E$ es no aleatorio, se dice que $\mathscr{A}$ *absorbe* a B si para casi todo $\omega \in \Omega$ existe $t(\omega) \in \mathbb{T}$ tal que para todo $t \geq t(\omega)$, $\varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), B) \subseteq \mathscr{A}(\omega)$.

En la siguiente proposición se verán condiciones suficientes para que un Ω-límite sea no vacío, compacto e invariante. Nótese que si $\mathscr{B}$ es vacío para casi todo $\omega \in \Omega$, entonces para casi todo $\omega \in \Omega$, $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \emptyset)} = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \emptyset} = \emptyset$.

Proposición 1.3.6. *Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E). Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{B} \neq \emptyset$ para casi todo $\omega \in \Omega$, conjuntos aleatorios tales que $\mathscr{K}$ absorbe a $\mathscr{B}$ y $\mathscr{K}$ es compacto. Entonces para casi todo $\omega \in \Omega$ se tiene:*

1. *$\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ es no vacío y $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) \subseteq \mathscr{K}(\omega)$ (y por lo tanto $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ es compacto).*
2. *$\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ es invariante respecto a φ.*
3. *$\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$.*
4. *$\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) \subseteq \Omega_{\mathscr{K}}(\omega)$ y $\Omega_{\mathscr{K}}(\omega)$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$.*

Demostración. Antes de proceder con la prueba, obsérvese que si $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ son tales que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y $x_n \in \mathscr{B}(\vartheta_{-t_n}(\omega))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_{\mathscr{B}}(\omega)$ se tiene que la propiedad de absorción de $\mathscr{K}(\omega)$ implica que $\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n) \in \mathscr{K}(\omega)$, y por la compacidad de $\mathscr{K}(\omega)$ se sigue que existe una sub-sucesión $\left\{\varphi\left(t_{n_k}, \vartheta_{-t_{n_k}}(\omega), x_{n_k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}(\omega)$ que converge a algún $y \in \mathscr{K}(\omega)$ (en la seudométrica d).

1. Por lo observado arriba, $\lim_{k\to\infty} d\left(\varphi\left(t_{n_k}, \vartheta_{-t_{n_k}}(\omega), x_{n_k}\right), y\right) = 0$, y por construcción de las sucesiones $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y la caracterización vista anteriormente para $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$, se sigue que $y \in \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$. Por lo tanto $\emptyset \neq \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$. Por otra parte, de la propiedad de absorción es claro que

$$\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) \subseteq \bigcap_{T\geq t_{\mathscr{B}}(\omega)} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi\left(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{A}\left(\vartheta_{-t}(\omega)\right)\right)} \subseteq \mathscr{K}(\omega),$$

y puesto que $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ es cerrado contenido en el compacto $\mathscr{K}(\omega)$, se sigue que $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ es compacto.

2. Por el Lema 1.3.3 se tiene que $\varphi(t, \omega, \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)) \subseteq \Omega_{\mathscr{B}}(\vartheta_t(\omega))$, para todo $t \geq 0$ y casi todo $\omega \in \Omega$. Para la otra contención, sea $y \in \Omega_{\mathscr{B}}(\vartheta_t(\omega))$ con $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$ (donde se supone que para dicho $\omega \in \Omega$ se cumple la propiedad de absorción). Entonces existen $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tales que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y $x_n \in \mathscr{B}(\vartheta_{-t_n+t}(\omega))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} d\left(\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n+t}(\omega), x_n\right), y\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} d\left(\varphi\left(t, \omega, \varphi\left(t_n - t, \vartheta_{-(t_n-t)}(\omega), x_n\right)\right), y\right). \end{aligned}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n - t \geq t_{\mathscr{B}}(\omega)$, entonces la propiedad de absorción de $\mathscr{K}(\omega)$ implica que

$$\varphi\left(t_n - t, \vartheta_{-(t_n-t)}(\omega), x_n\right) \in \mathscr{K}(\omega),$$

y por la compacidad de $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ se sigue que existe una sub-sucesión

$$\left\{\varphi\left(t_{n_m} - t, \vartheta_{-(t_{n_m}-t)}(\omega), x_{n_m}\right)\right\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}(\omega)$$

que converge a algún $u \in \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$. De la continuidad de $\varphi(t, \omega, \cdot)$ para todo $t \geq 0$ y casi todo $\omega \in \Omega$, se sigue que

$$\begin{aligned} d\left(\varphi\left(t, \omega, u\right), y\right) &= \lim_{m\to\infty} d\left(\varphi\left(t, \omega, \varphi\left(t_{n_m} - t, \vartheta_{-(t_{n_m}-t)}(\omega), x_{n_m}\right)\right), y\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de donde se concluye por definición que $y \in \varphi(t, \omega, \Omega_{\mathscr{B}}(\omega))$. Así, $\Omega_{\mathscr{B}}(\vartheta_t(\omega)) \subseteq \varphi(t, \omega, \Omega_{\mathscr{B}}(\omega))$, para todo $t \geq 0$ y casi todo $\omega \in \Omega$. Por lo tanto $\Omega_{\mathscr{B}}(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(t, \omega, \Omega_{\mathscr{B}}(\omega))$, para todo $t \geq 0$ y casi todo $\omega \in \Omega$.

3. Se procederá por contradicción. Si $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ no atrajera fuertemente a $\mathscr{B}$, entonces para todo $N \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(N) = 0$, existiría $\omega \notin N$ tal que existirían sucesiones $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, con $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y $x_n \in \mathscr{B}(\vartheta_{-t_n}(\omega))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que para algún $\epsilon > 0$ se tendría que

$$d\left(\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n\right), \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)\right) \geq \epsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}; \tag{1.1}$$

pero por compacidad de $\Omega_{\mathscr{A}}(\omega)$ y usando un argumento similar al usado en *2*., existiría una sub-sucesión de $\left\{\varphi\left(t_{n_k}, \vartheta_{-t_{n_k}}(\omega), x_{n_k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ la cual converge a un punto $u \in \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$, lo cual es una contradicción con (1.1).

4. Sea $y \in \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n\right), y\right) = 0,$$

para algunas sucesiones $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, con $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y $x_n \in \mathscr{B}(\vartheta_{-t_n}(\omega))$. Sea $T \geq 0$ fijo y $N_0 := \min_{n\in\mathbb{N}}\{t_n \geq T + t_{\mathscr{B}}(\vartheta_{-T}(\omega))\}$. Nótese que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n\right) = \varphi\left(T, \vartheta_{-T}(\omega), \varphi\left(t_n - T, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n\right)\right). \tag{1.2}$$

Puesto que $t_n - T \geq t_{\mathscr{B}}(\vartheta_{-T}(\omega))$ cuando $n \geq N_0$ y

$$x_n \in \mathscr{B}(\vartheta_{-t_n}(\omega)) = \mathscr{B}\left(\vartheta_{-(t_n-T)}(\vartheta_{-T}(\omega))\right),$$

entonces del hecho de que $\mathscr{K}$ absorbe a $\mathscr{B}$, se concluye que

$$\varphi(t_n - T, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n) = \varphi\left(t_n - T, \vartheta_{-(t_n-T)}(\vartheta_{-T}(\omega)), x_n\right) \in \mathscr{K}(\vartheta_{-T}(\omega)).$$

De esta forma , de (1.2) se obtiene que para todo para $n \geq N_0$:

$$\begin{aligned}
\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n) &= \varphi(T, \vartheta_{-T}(\omega), \varphi(t_n - T, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n)) \\
&\in \varphi(T, \vartheta_{-T}(\omega), \mathscr{K}(\vartheta_{-T}(\omega))), \\
&\subseteq \bigcup_{t \geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{K}(\vartheta_{-t}(\omega))) \\
&\subseteq \overline{\bigcup_{t \geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{K}(\vartheta_{-t}(\omega)))},
\end{aligned}$$

y como $T \geq 0$ fue arbitrario se tiene que:

$$\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), x_n) \in \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{K}(\vartheta_{-t}(\omega)))} = \Omega_{\mathscr{K}}(\omega),$$

lo cual implica que $y \in \Omega_{\mathscr{K}}(\omega)$, puesto que $\Omega_{\mathscr{K}}(\omega)$ es cerrado. Por otra parte, como $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) \subseteq \Omega_{\mathscr{K}}(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$ y por el inciso *3.* se sabe que $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$, entonces es inmediato que $\Omega_{\mathscr{K}}(\omega)$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$. ■

En el resultado anterior no se sabe si el Ω-límite de un conjunto aleatorio compacto es compacto. La noción de atractor global permitirá construir atractores globales, los cuales resultarán ser compactos.

Definición 1.3.7. Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E) tal que existe un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{A}$ el cual cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathscr{A}$ es invariante respecto a φ.

2. $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a todos los conjuntos acotados deterministas $B \subseteq E$.

Entonces se dice que $\mathscr{A}$ es un *atractor global* para φ.

Este concepto es también conocido como B-atractor fuerte, y su estudio se profundizará en el Sección §1.4.

Observación 1.3.8. Las nociones de atracción y absorción están muy relacionadas. Si un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{K}$ absorbe a $\mathscr{B}$, entonces $\Omega_{\mathscr{K}}(\omega)$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$, como se vio en la Proposición 1.3.6, inciso *4.*, y si un conjunto $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$, entonces todo conjunto aleatorio $\mathscr{K}$ que contenga una vecindad abierta de $\mathscr{A}$, absorbe a $\mathscr{B}$. Además se tiene el siguiente lema:

Lema 1.3.9. *Si $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$, entonces $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) \subseteq \mathscr{A}(\omega)$, para casi todo $\omega \in \Omega$.*

Demostración. Si $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a $\mathscr{B}$, entonces de 1.3.4, para todo $\epsilon > 0$, existe $\tau := t(\epsilon, \omega) > 0$ tal que para todo $t \geq \tau$, $d(\varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{B}(\vartheta_{-t}(\omega))), \mathscr{A}(\omega)) < \epsilon$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d\left(\overline{\bigcup_{s\geq\tau} \varphi(t, \vartheta_{-s}(\omega), \mathscr{B}(\vartheta_{-s}(\omega)))}, \mathscr{A}(\omega)\right) &= d\left(\bigcup_{s\geq\tau} \varphi(t, \vartheta_{-s}(\omega), \mathscr{B}(\vartheta_{-s}(\omega))), \mathscr{A}(\omega)\right) \\ &= \sup_{s\geq\tau} d(\varphi(t, \vartheta_{-s}(\omega), \mathscr{B}(\vartheta_{-s}(\omega))), \mathscr{A}(\omega)) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) \subseteq \overline{\bigcup_{s\geq t} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \mathscr{B}(\vartheta_{-t}(\omega)))}$ para todo $t \geq 0$, se concluye que $d(\Omega_{\mathscr{B}}(\omega), \mathscr{A}(\omega)) < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Tomando $\epsilon \downarrow 0$, se tiene que $d(\Omega_{\mathscr{B}}(\omega), \mathscr{A}(\omega)) = 0$, es decir, $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega) \subseteq \mathscr{A}(\omega)$. ■

Teorema 1.3.10. *Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E) tal que existe un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{K}$, el cual absorbe todos los subconjuntos $B \subseteq E$ acotados. Entonces si $B \subseteq E$ es acotado, el conjunto*

$$\mathscr{A}(\omega) := \overline{\bigcup_{B\subseteq E} \Omega_B(\omega)},$$

donde $\Omega_B(\omega) := \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), B)}$, es un atractor global para φ.

Demostración. Si $B \subseteq E$ es acotado y $\mathscr{K}$ absorbe a B, entonces por la Proposición 1.3.6, inciso *1.*, se tiene que $\Omega_B(\omega) \subseteq \mathscr{K}(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$ y todo $B \subseteq E$ acotado; al ser $\mathscr{K}$ compacto, se concluye que $\mathscr{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{B\subseteq E} \Omega_B(\omega)} \subseteq \mathscr{K}(\omega)$ es compacto. Por otra parte, de lo visto en 1.3.6, inciso *2.* se tiene que $\varphi(t, \omega, \Omega_B(\omega)) = \Omega_B(\omega)$ y de esta forma, dado que $\varphi(t, \omega, \cdot)$ es continuo para todo $t \in \mathbb{R}^+$ y casi todo $\omega \in \Omega$, se tiene:

$$\varphi\left(t, \omega, \overline{\bigcup_{B\subseteq E} \Omega_B(\omega)}\right) \subseteq \overline{\bigcup_{B\subseteq E} \varphi(t, \omega, \Omega_B(\omega))} = \overline{\bigcup_{B\subseteq E} \Omega_B(\omega)},$$

con lo que se demuestra que $\mathscr{A}(\omega)$ es débilmente invariante. De la compacidad de $\mathscr{A}(\omega)$ se sigue la otra contención. Por último, para ver que $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a todos los conjuntos acotados deterministas $B \subseteq E$, basta notar que por Proposición 1.3.6, inciso *3.*, $\Omega_B(\omega)$ atrae fuertemente a B, y como $\Omega_B(\omega) \subseteq \overline{\bigcup_{B\subseteq E} \Omega_B(\omega)} = \mathscr{A}(\omega)$, entonces $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a B, para todo $B \subseteq E$ acotado. ■

1.3.2 Medidas invariantes sobre conjuntos aleatorios

Definición 1.3.11. Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E). El mapeo

$$\Theta_t : \Omega \times E \to \Omega \times E, \quad \Theta_t(\omega, x) := (\vartheta_t(\omega), \varphi(t, \omega, x)), \ t \in \mathbb{T}$$

es llamado el *producto oblicuo o asimétrico* entre el SDM ϑ y el cociclo φ.

Obsérvese que $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ define un sistema dinámico medible sobre $(\Omega \times E, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E))$. En efecto, la transformación $\Theta : \mathbb{T} \times \Omega \times E \to \Omega \times E$ definida por $\Theta(t, \omega, x) = \Theta_t(\omega, x)$ es medible respecto $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E) / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$ y además:

$$\Theta_0(\omega, x) = (\vartheta_0(\omega), \varphi(0, \omega, x)) = (\omega, x) = \mathrm{id}_{\Omega\times E}(\omega, x)$$

y

$$\begin{aligned}\Theta_{s+t}(\omega, x) &= (\vartheta_{s+t}(\omega), \varphi(s+t, \omega, x)) = (\vartheta_s(\vartheta_t(\omega)), \varphi(s, \vartheta_t(\omega), \varphi(t, \omega, x)))\\ &= \Theta(s, \vartheta_t(\omega), \varphi(t, \omega, x))\\ &= \Theta_s(\Theta_t(\omega, x)), \quad \text{para todos } s, t \in \mathbb{T}, (\omega, x) \in \Omega \times E.\end{aligned}$$

Sea $\pi_\Omega : \Omega \times E \to \Omega$ la proyección canónica de $\Omega \times E$ sobre Ω dada por $\pi_\Omega(\omega, x) = \omega$, entonces $\pi_\Omega \circ \Theta_t(\omega, x) = \vartheta_t \circ \pi_\Omega(\omega, x)$ y además para todo $t \in \mathbb{T}$, $\vartheta_t(\pi_\Omega\mu) = \pi_\Omega\mu$ siempre que $\Theta_t(\mu) = \mu$ para todo $t \in \mathbb{T}$ donde μ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$; es decir, la *marginal de* μ *en* Ω es invariante respecto a $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$. En efecto, sea $A \in \mathcal{F}$ y $t \in \mathbb{T}$, entonces

$$\begin{aligned}\vartheta_t(\pi_\Omega\mu) A &= \pi_\Omega\mu\left(\vartheta_t^{-1}(A)\right)\\ &= \mu\left(\vartheta_t^{-1}(A) \times E\right)\\ &= \mu\left(\left\{(\omega, x) \in \Omega \times E : \omega \in \vartheta_t^{-1}(A)\right\}\right)\\ &= \mu(\{(\omega, x) \in \Omega \times E : (\vartheta_t(\omega), \varphi(t, \omega, x)) \in A \times E\})\\ &= \mu\left(\Theta_t^{-1}(A \times E)\right) = \mu(A \times E) = \pi_\Omega\mu(A).\end{aligned}$$

Definición 1.3.12. Sea (ϑ, φ) un SDA. Una medida de probabilidad μ sobre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$ se dice que es *invariante respecto a* φ si lo es para el producto oblicuo Θ inducido por φ, es decir $\Theta_t(\mu) = \mu$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Por lo visto arriba, el hecho que que $\vartheta_t(\pi_\Omega\mu) = \pi_\Omega\mu$, para μ una medida de probabilidad invariante respecto a φ, no implica que $\pi_\Omega\mu = \mathbb{P}$. Por otra parte, nótese que un SDA (ϑ, φ) está equipado de una medida invariante respecto a $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, pero no necesariamente de una medida invariante respecto a φ.

Considérese el espacio

$$\mathcal{P}_\mathbb{P}(\Omega \times E) := \{\mu \text{ probabilidad sobre } \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E) \text{con marginal } \mathbb{P} \text{ en } \Omega\}.$$

Definición 1.3.13. Una medida de probabilidad $\mu(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ se dice que es una *probabilidad de transición* sobre $\Omega \times E$ si se cumplen las condiciones 1. y 2. siguientes:

1. Para todo $B \in \mathcal{B}(E)$, $\omega \mapsto \mu(\omega, B) \equiv \mu_\omega(B)$ es medible respecto a $\mathcal{F}$,

2. Para casi todo $\omega \in \Omega$, $B \mapsto \mu_\omega(B)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(E)$.

Si además se tiene que para alguna $\nu \in \mathcal{P}_\mathbb{P}(\Omega \times E)$ se cumple:

3. Para todo $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$

$$\nu(A) = \int_\Omega \int_E \mathbb{1}_A(\omega, x)\, \mu_\omega(\mathrm{d}x)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega),$$

entonces $\mu_\omega(\cdot)$ se llama *desintegración* de ν.

El conjunto $\mathcal{P}_\Omega(E)$ denota el conjunto de las probabilidades de transición sobre $\Omega \times E$. Por un argumento de clases monótonas se puede demostrar que la condición 3. anterior es equivalente a que si $v \in \mathcal{P}_\mathbb{P}(\Omega \times E)$ tiene como desintegración a $\mu \in \mathcal{P}_\Omega(E)$, entonces toda $f \in L^1(\mu)$ (donde $L^1(\mu)$ es el espacio de las funciones $f : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ con $\int_{\Omega\times E} f(\omega, x)\, \mu(\mathrm{d}(\omega, x)) < \infty$) se cumpla que:

$$\nu(f) := \int_{\Omega\times E} f(\omega, x)\, \nu(\mathrm{d}(\omega, x)) = \int_\Omega \int_E f(\omega, x)\, \mu_\omega(\mathrm{d}x)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Considerando las secciones de $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$ dadas por $A_\omega := \{x \in E : (\omega, x) \in A\}$, $\omega \in \Omega$, se tiene, en este caso, que:

$$\nu(A) = \int_\Omega \mu_\omega(A_\omega)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega),\ \text{para todo } A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E).$$

Definición 1.3.14. Se dice que una medida de probabilidad $\nu \in \mathcal{P}_\mathbb{P}(\Omega \times E)$ está *soportada en un conjunto aleatorio* $\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ si $\nu_\omega(\mathscr{A}(\omega)) = 1$ para casi todo $\omega \in \Omega$.

El siguiente teorema permite garantizar la existencia de una medida invariante. El argumento usado es debido a Krylov-Bogolyubov y la demostración está en Crauel [3], Teorema 6.12.

Teorema 1.3.15. *Supóngase que* (ϑ, φ) *es un SDA y que* $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \mathcal{P}_\Omega(E)$ *es cerrado, tenso (ver Definición A.2.3) y convexo, tal que* $\Theta_t\Gamma \subseteq \Gamma$ *para todo* $t \geq 0$ *(es decir, para cada* $\gamma^1 \in \Gamma$ *existe* $\gamma^2 \in \Gamma$ *tal que* $\Theta_t(\gamma^1) = \gamma^2$*, para cada* $t \geq 0$*). Sea* $\{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ *y* $t_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *una sucesión creciente de tiempos aleatorios no negativos tales que* $\limsup_n \mathbb{E}(t_n^{-1}) = 0$*. Entonces la sucesión* $\{\gamma^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ *dada por*

$$\omega \mapsto \gamma_\omega^n := \frac{1}{t_n(\omega)} \int_{[0,t_n(\omega)]} \Theta_s(\sigma_\omega^n)\, ds, \tag{1.3}$$

tiene una sub-sucesión convergente en Γ*, la cual converge a una medida invariante respecto a* φ*. Más aún, toda sub-sucesión convergente de* $\{\gamma^n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, converge a una medida invariante respecto a* φ*.*

Con las definiciones y resultados del Apéndice A, se demostrarán los siguientes resultados sobre existencia de medidas invariantes.

Teorema 1.3.16. *Si* $\mathscr{K}$ *es un conjunto aleatorio compacto débilmente invariante respecto a* φ*, y para casi todo* $\omega \in \Omega$ *se tiene que* $\mathscr{K}(\omega) \neq \emptyset$*, entonces existe alguna medida invariante respecto a* φ *la cual está soportada en* $\mathscr{K}$*.*

Demostración. Considérese el conjunto

$$\Gamma := \{\mu \in \mathcal{P}_\Omega(E) : \mu_\omega(\mathscr{K}(\omega)) = 1, \text{ para casi todo } \omega \in \Omega\}.$$

Se probará que la familia Γ satisface las hipótesis del Teorema 1.3.15. Por el Teorema A.2.4 (equivalencia de 2. y 3.), Γ es tenso. Además es convexo y $\Theta_t\Gamma \subseteq \Gamma$ para todo $t \geq 0$, ya que si $\gamma^1 \in \Theta_t\Gamma$, entonces $\gamma^1 = \Theta_t\gamma$, para algún $\gamma \in \Gamma$, y de esta forma, para todo ω tal que $\varphi(t,\omega,\mathscr{K}(\omega)) \subseteq \mathscr{K}(\vartheta_t(\omega))$ y para todo $t \geq 0$, de la propiedad de ser débilmente invariante se tiene que:

$$\begin{aligned}
\gamma^1_\omega(\mathscr{K}(\omega)) &= \gamma_\omega\left(\pi_E\left[\Theta_t^{-1}(\omega,\mathscr{K}(\omega))\right]\right)\\
&= \gamma_\omega\left(\pi_E\left\{(\omega',x) \in \Omega \times E : (\vartheta_t(\omega'),\varphi(t,\omega',x)) \in (\omega,\mathscr{K}(\omega))\right\}\right)\\
&\geq \gamma_\omega\left(\{x \in E : \varphi(t,\omega',x) \in \mathscr{K}(\vartheta_t(\omega')), \vartheta_t(\omega') = \omega\}\right)\\
&\geq \gamma_\omega\left(\{x \in \mathscr{K}(\omega') : \varphi(t,\omega',x) \in \mathscr{K}(\vartheta_t(\omega')), \vartheta_t(\omega') = \omega\}\right) = 1.
\end{aligned}$$

También $\Gamma \neq \emptyset$ ya que por el Teorema A.2.1, existe un mapeo $c : \Omega \to E$ tal que $c(x) \in \mathscr{K}(\omega)$. De esta forma $\mathbb{1}_{\mathscr{K}(\omega)}c(\omega) = 1$ para casi todo $\omega \in \Omega$, de donde la función $\Delta : \Omega \times E \to [0,1]$ dada $(\omega, A) \mapsto \Delta(\omega, A) \equiv \Delta_\omega(A) := \delta_{c(\omega)}(A)$ (δ es la delta de Dirac), con $A \in \mathcal{B}(E)$ es tal que $\Delta_\omega(\mathscr{K}(\omega)) = 1$ para casi todo $\omega \in \Omega$, es decir $\Delta \in \Gamma$. Para demostrar que Γ es cerrado (en la topología débil), sea $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Γ que converge a una medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{P}_\Omega(E)$, entonces

$$1 = \limsup_n \mu^n(\mathscr{K}) \leq \mu(\mathscr{K}) = \int_\Omega \mu_\omega(\mathscr{K}(\omega))\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega),$$

donde se ha usado el Teorema A.2.2 para la desigualdad. De esta forma $\mu \in \Gamma$ y así Γ es cerrado. Por el teorema anterior se sigue el resultado, tomando por ejemplo la sucesión de tiempos aleatorios como $t_n : \Omega \to \mathbb{R}$ de forma que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $t_n(\omega) = n$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces la sucesión dada por (1.3) posee una sub-sucesión que converge en Γ, es decir, esta soportada en $\mathscr{K}$. ■

Definición 1.3.17. Dado un SDA (ϑ,φ), se define la *σ-álgebra del pasado del sistema* como la σ-álgebra

$$\mathcal{F}^- := \sigma\{\omega \mapsto \varphi(t,\vartheta_{-s}(\omega),x) : 0 \leq t \leq s, x \in E\}.$$

Nótese que como $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$ y $\varphi(t-s,\omega,\varphi^{-1}(s,\omega,x)) = \varphi(t,\vartheta_{-s}(\omega),x)$ para cualesquiera $s,t \in \mathbb{T}$, se deduce que

$$\mathcal{F}^- = \sigma\{\omega \mapsto \varphi(-t,\omega,x) : 0 \leq t, x \in E\}.$$

Los elementos del conjunto $\mathcal{P}_{\Omega,\mathcal{F}^-}(X)$, el cual denota el conjunto de las medidas de transición en $\Omega \times E$ que son medibles respecto a $\mathcal{F}^-$ (es decir, para todo $B \in \mathcal{B}(E)$, $\omega \mapsto \mu(\omega,B) \equiv \mu_\omega(B)$ es medible respecto a $\mathcal{F}^-$, para cada $\mu \in \mathcal{P}_{\Omega,\mathcal{F}^-}(X)$), son llamados *medidas de Markov*. Una motivación para este nombre es la siguiente: si $\tau \geq 0$, entonces

$$\vartheta_{-\tau}^{-1}\left(\mathcal{F}^-\right) = \sigma\left\{\omega \mapsto \varphi\left(t,\vartheta_{-(s+\tau)}(\omega),x\right) : 0 \leq t \leq s, x \in E\right\} \subseteq \mathcal{F}^-,$$

lo cual se interpreta como "el pasado del sistema permanece invariante frente a retornos en el tiempo", o, "el retorno en el tiempo no permite ganar más información del pasado".

En el siguiente resultado se puede ver que es posible restringir la medibilidad de los conjuntos aleatorios compactos, a la σ-álgebra del pasado (la cual depende del flujo del SDA), y no de la σ-álgebra de la cual se dota al espacio Ω. Su demostración se basa en parte, del hecho que $\mathcal{F}^-$ está casi contenida en $\mathcal{F}$.

Teorema 1.3.18. *Si $\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es un conjunto aleatorio compacto débilmente invariante respecto a φ, el cual es medible respecto a la σ-álgebra del pasado del sistema, entonces existe una medida de Markov invariante soportada por $\mathscr{A}$.*

Demostración. Considérese el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F}^-)$ y el conjunto

$$\Gamma' = \Gamma \cap \mathcal{P}_{\Omega,\mathcal{F}^-}(E),$$

donde Γ es como en la demostración del Teorema 1.3.16. Entonces $\Gamma' \neq \emptyset$ ya que por el Teorema A.2.1 y un argumento similar al de la demostración anterior, se deduce que la medida aleatoria Δ definida en la demostración anterior cumple que $\Delta \in \mathcal{P}_{\Omega,\mathcal{F}^-}(E)$. Γ' es cerrado (ya que $\mathcal{P}_{\Omega,\mathcal{F}^-}(E)$ es cerrado en $\mathcal{P}_\Omega(E)$ por el Teorema A.2.5), tenso y convexo, tal que $\Theta_t\Gamma' \subseteq \Gamma'$ para todo $t \geq 0$. La demostración se sigue del Teorema 1.3.15 ■

1.3.3 Aplicación a una ecuación de reacción-difusión con ruido aditivo

En esta sección se da un ejemplo particular de un atractor para el flujo generado por una ecuación diferencial estocástica de reacción-difusión. Primero se dan los preliminares para entender el problema y luego se prueba la existencia de un conjunto aleatorio compacto el cual absorbe los conjuntos acotados del espacio de estados. De esto se sigue la existencia de un atractor global.

Para mayor detalle sobre la notación, se aconseja al lector ver el Apéndice A, Sección §1.3.

Preliminares

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un conjunto abierto con frontera regular ∂D. Sea Δ el operador de Laplace $\Delta : D(\Delta) \subseteq H \to H$, donde $H := L^2(D)$ y $D(\Delta) = \{u \in H^2(D) : u \equiv 0 \text{ sobre } \partial D\}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de la forma $f(s) = \sum_{i=0}^{2m-1} a_i s^i$ para todo $s \in \mathbb{R}$, con $a_{2m-1} < 0$, para $m \in \mathbb{Z}^+$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \ldots, 2m-1\}$ los cuales satisfacen una condición que se especificará más adelante. Considere la siguiente ecuación diferencial parcial estocástica en D con ruido aditivo, definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t,\omega,x) = \Delta u(t,\omega,x)\,\mathrm{d}t + f(u(t,\omega,x))\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{k} \phi_j(x)\,\mathrm{d}B^j(t,\omega) \\ u(t,\omega,x) = 0 \text{ en } \partial D, \end{cases} \tag{1.4}$$

donde $u : \mathbb{R} \times \Omega \times D \to \mathbb{R}$ es un campo escalar aleatorio, $\{B^j(t,\cdot)\,; t \in \mathbb{R}\}$ es un movimiento Browniano estándar para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ definido en el espacio canónico $\Omega := \{\omega \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \omega(0) = 0\}$, $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Borel inducida por la topología compacto-abierta, y $\mathbb{P}$ la medida de Weiner. Se considera que $\{B^j(t,\cdot)\,; t \in \mathbb{R}\}$ y $\{B^i(t,\cdot)\,; t \in \mathbb{R}\}$ son independientes para $i \neq j$, $i,j \in \{1,\ldots,k\}$ y $\phi_j : D \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ldots,k\}$ es un campo escalar. Durante esta sección se trabajará con los espacios

$$V := H_0^1(D) \quad Z := L^{2m}(D) \quad Z' := L^{\frac{2m}{2m-1}}(D).$$

Sea $F : Z \to Z'$ dada por $F(u) = f(u)$, para $u \in Z$. Se supondrá que $\phi_j \in Z \cap D(\Delta)$ y que $\Delta\phi_j \in Z$. Con lo anterior, se puede escribir la ecuación (1.4) de la forma

$$\mathrm{d}u(t,\omega,x) = \Delta u(t,\omega,x)\,\mathrm{d}t + F[u(t,\omega,x)]\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{k}\phi_j(x)\,\mathrm{d}B^j(t,\omega). \tag{1.5}$$

Por el Teorema A.3.2 se tiene que si D es un dominio en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂D regular, entonces para todo $q \in [1,p^*)$, donde $p^* = \frac{np}{n-p}$ y $n > p \geq 1$, se tiene que la incrustación

$$W^{1,p}(D) \hookrightarrow L^q(D),$$

es compacta. Por lo tanto, tomando $p = q = 2$ se concluye que $H^1(D) \hookrightarrow L^2(D) = H$ es compacta. Sin embargo, nótese que $V = H_0^1(D) \hookrightarrow H^1(D)$ es compacta por definición de $H_0^1(D)$, luego la incrustación $V \hookrightarrow H$ es compacta.

Por otra parte, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$|f(s)| \leq c_1 |s|^{2m-1} + c_2, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

En efecto, si $s \in [-1,1]$, sea $c_2 = \max_{u\in[-1,1]} |f(u)|$ y así se tiene que $|f(s)| \leq c_2 \leq c_2 + |s|^{2m-1}$. Si $s \in [-1,1]^c$, sea $c_1' = 2m \max_{i\in\{0,\ldots,2m-1\}} |a_i|$. De esta forma

$$|f(s)| \leq \sum_{i=0}^{2m-1} |a_i|\,|s|^i \leq c_1'\,|s|^{2m-1}.$$

A partir de lo anterior, tomando $c_1 = c_1' \vee 1$ se tiene que para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|f(s)| \leq c_1 |s|^{2m-1} + c_2.$$

Así, tomando $c_3 = c_2 |D|^{\frac{2m-1}{2m}}$ se tiene que que para todo $u(t,\omega,\cdot) \in Z$, $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\|F(u(t,\omega,\cdot))\|_{Z'} &\leq \left\|c_1 |u(t,\omega,\cdot)|^{2m-1} + c_2\right\|_{Z'} \leq c_1 \left\||u(t,\omega,\cdot)|^{2m-1}\right\|_{Z'} + \|c_2\|_{Z'} \\ &= c_1 \|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m-1} + c_3.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Ahora, del cambio de variable $v(t,\omega,x) = u(t,\omega,x) - B(t,\omega,x)$ en (1.5), donde $B(t,\omega,x) = \sum_{j=1}^{k} \phi_j(x) B^j(t,\omega)$, se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t,\omega,x) = \Delta v(t,\omega,x) + F[v(t,\omega,x) + B(t,\omega,x)] + \Delta B(t,\omega,x). \tag{1.7}$$

El siguiente teorema permite establecer la existencia de un cociclo para el flujo generado por la ecuación (1.4). La demostración se encuentra en el libro de Temam [19], pg. 91. y se basa en el método de estimaciones a priori de las aproximaciones de Galerkin.

Teorema 1.3.19. *Para casi todo $\omega \in \Omega$, todo $t_0 \in \mathbb{R}$ y todo $v_0(t,\omega,\cdot) \in H$, la ecuación* (1.7) *con la condición inicial aleatoria $v(t_0,\omega,x) = u_0(x) - B(t,\omega,x)$, donde $u_0 \in H$ es la condición inicial no aleatoria de* (1.4)*, tiene una única solución fuerte*

$$v(\cdot,\omega,\cdot\cdot) \in C([t_0,\infty);H) \cap L^2([t_0,\infty);V) \cap L^{2m}([t_0,\infty);Z),$$

donde $v(t_0,\omega,x) = v_0(x)$.

Se escribe $v(t,\omega,x)$ como $v(t,\omega,x;t_0,v_0(x))$ para indicar la dependencia de v con la condición inicial al v_0 al tiempo t_0. Se cumple que si $v(t,\omega,x;t_0,v(t_0,\omega,x))$ es la solución de (1.7) con la condición inicial aleatoria $v(t_0,\omega,x) = u_0(x) - B(t_0,\omega,x)$, donde $u_0(x) = u(t_0,\omega,x)$ es la condición inicial no aleatoria de la ecuación (1.4), entonces

$$u(t,\omega,x;t_0,u_0(x)) = v(t,\omega,x;t_0,v(t_0,\omega,x)) + B(t,\omega,x),$$

es el flujo asociado a la ecuación (1.4). Además, si se toma

$$\varphi(t-t_0,\vartheta_{t_0}(\omega),u_0(\cdot)) := u(t,\omega,\cdot;t_0,u_0(\cdot)), \text{ para } t \geq t_0,$$

con $\vartheta_s(\omega(\cdot)) = \omega(\cdot+s) - \omega(s)$, entonces (ϑ,φ) define un SDA sobre (H,d_H), donde d_H es la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_H$.

Desigualdades previas

Nótese que para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $\omega \in \Omega$, $B(t,\omega,\cdot) \in D(\Delta)$ ya que por hipótesis $\phi^j(\cdot) \in D(\Delta)$, para todo $j \in \{1,\ldots,k\}$; además, por definición de Δ y F, para todo $u(t,\omega,\cdot) \in D(\Delta) \cap Z$, $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$, de la fórmula de Green se tiene que

$$\begin{aligned}\int_D \langle \nabla u(t,\omega,x), \nabla v(t,\omega,x)\rangle_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x = &\int_{\partial D} \langle \nabla v(t,\omega,x) u(t,\omega,x), \hat{\mathrm{v}}(t,\omega,x)\rangle_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \\ &- \int_D \Delta v(t,\omega,x) u(t,\omega,x) \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

donde $\hat{\text{v}}$ representa el vector normal exterior a D en el punto $x \in D$. Por lo tanto, dado que $\int_{\partial D} \langle \nabla v(t,\omega,x) f(u(t,\omega,x)), \hat{\text{v}}(t,\omega,x)\rangle_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&-\langle \Delta (u(t,\omega,\cdot) - B(t,\omega,\cdot)), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H \\
&\quad= -\langle \Delta u(t,\omega,\cdot), f(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H + \langle \Delta B(t,\omega,\cdot), f(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H \\
&\quad= -\int_D \Delta u(t,\omega,x) f(u(t,\omega,x))\,\mathrm{d}x + \int_D \Delta B(t,\omega) f(u(t,\omega,x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \int_D f'(u(t,\omega,x)) \langle \nabla u(t,\omega,x), \nabla u(t,\omega,x)\rangle_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x + \int_D \Delta B(t,\omega) f(u(t,\omega,x))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Puesto que f' es un polinomio con coeficiente principal $a_{2m-1} < 0$, entonces $f'(s) \leq \beta$, para alguna constante $\beta \in (0,\infty)$ y todo $s \in \mathbb{R}$. De esto y usando la desigualdad de Hölder se tiene que:

$$\begin{aligned}
&-\langle \Delta (u(t,\omega,\cdot) - B(t,\omega,\cdot)), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H \\
&\quad\leq \beta \int_D \|\nabla u(t,\omega,x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \mathrm{d}x \\
&\qquad+ \left(\int_D |F(u(t,\omega,x))|^{\frac{2m}{2m-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2m-1}{2m}} \left(\int_D |\Delta B(t,\omega)|^{2m} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2m}}, \qquad \text{por la des. de Hölder} \\
&\quad\leq \beta \|u\|_V^2 + \left(c_1 \|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m-1} + c_3\right) \|\Delta B(t,\omega,\cdot)\|_Z, \qquad \text{por (1.6)} \\
&\quad\leq \beta \|u(t,\omega,\cdot)\|_V^2 + c_1 \left[\frac{2m-1}{2m} \left(\|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m-1}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} + \frac{1}{2m} \|\Delta B(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m}\right] \\
&\qquad+ c_3 \|\Delta B(t,\omega,\cdot)\|_Z, \qquad \text{por la des. de Young.}
\end{aligned}$$

Si $p_1(t,\omega) = \frac{c_1}{2m} \|\Delta B(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + c_3 \|\Delta B(t,\omega)\|_Z \geq 0$, entonces para algunas constantes $\beta, \gamma > 0$:

$$-\langle \Delta (u(t,\omega,\cdot) - B(t,\omega,\cdot)), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H \leq \beta \|u(t,\omega,\cdot)\|_V^2 + \gamma \|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + p_1(t,\omega), \tag{1.8}$$

Se tiene que p_1 tiene crecimiento a lo más polinomial cuando $t \to -\infty$, para casi todo $\omega \in \Omega$, ya que por la ley fuerte de los grandes números,

$$\text{c.s.-}\lim_{t \to -\infty} \frac{\frac{c_1}{2m} \|\Delta B(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + c_3 \|\Delta B(t,\omega,\cdot)\|_Z}{t^{2m}} = 0.$$

Por otro lado, obsérvese que $sf(s)$ es un polinomio de grado par con coeficiente principal negativo, para todo $s \in \mathbb{R}$. De este modo, existen constantes $\delta_0, c_5 > 0$ tales que

$$sf(s) \leq -\delta_0 s^{2m} + c_5. \tag{1.9}$$

Por lo tanto, para todo $u(t,\omega,\cdot) \in Z$, $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$:

$$
\begin{aligned}
&\langle u(t,\omega,\cdot) - B(t,\omega,\cdot), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H \\
&\quad = \langle u(t,\omega,\cdot), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H - \langle B(t,\omega,\cdot), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H \\
&\quad = \int_D u(t,\omega,x) f(u(t,\omega,x))\,\mathrm{d}x - \int_D B(t,\omega,x) f(u(t,\omega,x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad \leq -\delta_0 \|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + c_5|D| + \left(c_1\|u\|_Z^{2m-1} + c_3\right)\|B(t,\omega,\cdot)\|_Z \qquad \text{por (1.6) y (1.9)}
\end{aligned}
$$

Nuevamente, por la desigualdad de Young:

$$
\begin{aligned}
\langle u(t,\omega,\cdot) - B(t,\omega,\cdot), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H &\leq -\delta_0\|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + c_5|D| \\
&\quad + c_1\frac{2m-1}{2m}\left(\|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m-1}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} \\
&\quad + \frac{c_1}{2m}\|B(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + c_3\|B(t,\omega,\cdot)\|_Z \\
&= -\delta\|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + p_2(t,\omega),
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

donde $\delta = \delta_0 - c_1\frac{2m-1}{2m}$ se supondrá no negativo y $p_2(t,\omega) := c_5|D| + \frac{c_1}{2m}\|B(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + c_3\|B(t,\omega,\cdot)\|_Z$ tiene las mismas propiedades de crecimiento que p_1. Las desigualdades (1.8) y (1.10) serán usadas para demostrar la existencia de un conjunto aleatorio compacto que absorbe todos los conjuntos acotados (lo que implica la existencia de un atractor global), y por lo tanto la misma idea de la prueba puede ser usada para otro sistema que cumpla con dichas desigualdades.

Absorción en H al tiempo $t = -1$

Sea $\omega \in \Omega$ fijo, $t_0 < -1$, $u_0 \in H$ y v la solución de la ecuación (1.7) para todo $t \geq t_0$ con $v(t_0,\omega,x) = u_0(x) - B(t_0,\omega,x)$. De (1.7) y la fórmula de Green se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|v(t,\omega,\cdot)\|_H^2 &= \left\langle v(t,\omega,\cdot), \frac{\partial}{\partial t}v(t,\omega,\cdot)\right\rangle_H \\
&= \langle v(t,\omega,\cdot), \Delta v(t,\omega,\cdot) + F(u(t,\omega,\cdot)) + \Delta B(t,\omega,\cdot)\rangle_H \\
&= -\|v(t,\omega,\cdot)\|_V^2 + \langle v(t,\omega,\cdot), F(u(t,\omega,\cdot))\rangle_H + \langle v(t,\omega,\cdot), \Delta B(t,\omega,\cdot)\rangle_H \\
&\leq -\|v(t,\omega,\cdot)\|_V^2 - \delta\|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + p_2(t,\omega) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|v(t,\omega,\cdot)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|B(t,\omega,\cdot)\|_V^2, \quad \text{por (1.10)} \\
&= -\frac{1}{2}\|v(t,\omega,\cdot)\|_V^2 - \delta\|u(t,\omega,\cdot)\|_Z^{2m} + p_3(t,\omega),
\end{aligned}
$$

donde $p_3(t,\omega) := p_2(t,\omega) + \frac{1}{2}\|B(t,\omega,\cdot)\|_V^2$ tiene las mismas propiedades de crecimiento de p_1 y p_2. De esta forma, dado que $\lambda_1\|v(t,\omega,\cdot)\|_H^2 \leq \|v(t,\omega,\cdot)\|_V^2$ (desigualdad (A.2)) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2+\frac{1}{2}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+2\delta\left\|u\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_Z^{2m}\leq-\frac{\lambda_1}{2}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2+2p_3\left(t,\omega\right). \quad (1.11)$$

Así

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2\leq 2p_3\left(t,\omega\right)-\frac{\lambda_1}{2}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2. \quad (1.12)$$

La desigualdad de Gronwall (ver Temam [19], pg. 90) afirma que si $f:[t_0,\infty)\to\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(t\right)\leq A\left(t\right)+B\left(t\right)f\left(t\right),\quad \text{para todo } t\geq t_0,$$

donde A y B son funciones real valuadas definidas en $[x_0,\infty)$, entonces si A, B y f' son localmente integrables, se cumple que

$$f\left(t\right)\leq f\left(t_0\right)\exp\left(\int_{t_0}^{t}B\left(s\right)\mathrm{d}s\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\int_{s}^{t}B\left(u\right)\mathrm{d}u\right)A\left(s\right)\mathrm{d}s,$$

para todo $t\geq t_0$.

Por lo tanto, de la desigualdad (1.12) y el lema de Gronwall se deduce que

$$\begin{aligned}\left\|v\left(-1\right)\right\|_H^2&\leq\left\|v\left(t_0,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-t_0)}+\int_{t_0}^{-1}e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-s)}2p_3\left(s,\omega\right)\mathrm{d}s\\&\leq 2e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-t_0)}\left\|u_0\left(\cdot\right)\right\|_H^2+2e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-t_0)}\left\|B\left(t_0,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2\\&\quad+\int_{-\infty}^{-1}e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-s)}2p_3\left(s,\omega\right)\mathrm{d}s, \end{aligned}\quad (1.13)$$

donde $v\left(s,\omega,x;t_0,v\left(t_0,\omega,x\right)\right):=v\left(s\right)$ para $s\geq t_0$, $t_0<1$, y $v\left(t_0,\omega,x\right)=u_0\left(x\right)-B\left(t_0,\omega,x\right)$, con $u_0\in H$ la condición inicial de la ecuación (1.4). De lo anterior se tiene el siguiente lema:

Lema 1.3.20. *Existe un radio aleatorio $r_1\left(\omega\right)>0$ tal que para todo $\rho>0$, existe un $\bar{t}\leq-1$ determinista para el cual se tiene la siguiente propiedad para casi todo $\omega\in\Omega$: para todo $t_0\leq\bar{t}$ y todo $u_0\in H$ tal que $\left\|u_0\left(\cdot\right)\right\|_H\leq\rho$, la solución $v\left(t,\omega,x;t_0,u_0\left(x\right)-B\left(t_0,\omega,x\right)\right)$ de la ecuación (1.7) sobre $t\in[t_0,\infty)$, con $v\left(t_0,\omega,x\right)=u_0\left(x\right)-B\left(t_0,\omega,x\right)$ y u_0 la condición inicial no aleatoria de (1.4), satisface la desigualdad:*

$$\left\|v\left(-1,\omega,\cdot,t_0,u_0\left(\cdot\right)-B\left(t_0,\omega,\cdot\right)\right)\right\|_H^2\leq r_1^2\left(\omega\right).$$

Demostración. Sea

$$r_1\left(\omega\right)=2+2\sup_{t_0\leq-1}2e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-t_0)}\left\|B\left(t_0,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2+\int_{-\infty}^{-1}e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-s)}2p_3\left(s,\omega\right)\mathrm{d}s,$$

el cual es finito para casi todo $\omega \in \Omega$ ya que $\|B(t_0,\omega,\cdot)\|_H^2$ y $p_3(s,\omega)$ tiene crecimiento a lo mas polinomial cuando $t_0, s \to -\infty$, respectivamente. Dado $\rho > 0$, sea $\bar{t}$ tal que

$$e^{-\frac{\lambda_1}{2}(-1-t_0)}\rho^2 \leq 1,$$

para todo $t_0 \in \left(-\infty, \bar{t}\right]$. Entonces de (1.13) se obtiene el resultado. ■

Estimación en $[-1,0]$

A continuación se presentan algunas cotas superiores que permitirán analizar la absorción al tiempo $t = 0$.

Integrando en la desigualdad (1.11) para $t \in [-1,0]$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\|v(s,\omega,\cdot)\|_V^2\,\mathrm{d}s + 2\delta\int_{-1}^{0}\|u(s,\omega,\cdot)\|_Z^{2m}\,\mathrm{d}s &\leq \|v(-1,\omega,\cdot)\|_H^2 - \|v(0,\omega,\cdot)\|_H^2\\ &\quad - \frac{\lambda_1}{2}\int_{-1}^{0}\|v(s,\omega,\cdot)\|_H^2\,\mathrm{d}s\\ &\quad + 2\int_{-1}^{0}p_3(s,\omega)\,\mathrm{d}s\\ &\leq \|v(-1,\omega,\cdot)\|_H^2 + 2\int_{-1}^{0}p_3(s,\omega)\,\mathrm{d}s. \quad (1.14)\end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad y el lema anterior se obtiene:

Lema 1.3.21. *Existen variables aleatorias $c_1(\omega)$ y $c_2(\omega)$ tales que para todo $\rho > 0$, existe un $\bar{t} \leq -1$ determinista para el cual se tiene la siguiente propiedad para casi todo $\omega \in \Omega$: para todo $t_0 \leq \bar{t}$ y todo $u_0 \in H$ tal que $\|u_0(\cdot)\|_H \leq \rho$, la solución $v(t,\omega,x;t_0,u_0(x) - B(t_0,\omega,x))$ de la ecuación (1.7) sobre $[t_0,\infty)$, con $v(t_0,\omega,x) = u_0(x) - B(t_0,\omega,x)$ y u_0 la condición inicial no aleatoria de (1.4), satisface:*

$$\int_{-1}^{0}\|v(s,\omega,\cdot)\|_V^2\,ds \leq c_1(\omega) \;\; y \;\; \int_{-1}^{0}\|u(s,\omega,\cdot)\|_Z^{2m}\,ds \leq c_2(\omega).$$

Demostración. De la desigualdad (1.14) se tiene que

$$\begin{aligned}c_1(\omega) &= 2\|v(-1)\|_H^2 + 4\int_{-1}^{0}p_3(s,\omega)\,\mathrm{d}s\\ c_2(\omega) &= \frac{1}{2\delta}\|v(-1)\|_H^2 + \frac{1}{\delta}\int_{-1}^{0}p_3(s,\omega)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

las cuales son finitas para casi todo $\omega \in \Omega$ por el el Lema 1.3.20. ■

Absorción en V al tiempo $t = 0$

Note que para $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\int_D\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v\left(t,\omega,x\right)\right)^2\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}v\left(t,\omega,x\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_i}v\left(t,\omega,x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Además, por la fórmula de Green:

$$\begin{aligned}-\int_D\Delta v\left(t,\omega,x\right)f\left(v\left(t,\omega,x\right)\right)\mathrm{d}x &= \int_D\left\langle\nabla v\left(t,\omega,x\right),\nabla\left[\frac{\partial}{\partial t}v\left(t,\omega,x\right)\right]\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}v\left(t,\omega,x\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_i}v\left(t,\omega,x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2 = -\int_D\Delta v\left(t,\omega,x\right)f\left(v\left(t,\omega,x\right)\right)\mathrm{d}x$. De (1.7) y el hecho que $f'\left(s\right)\leq\beta$ para todo $s\in\mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2\\ &\quad= -\left\langle\Delta v\left(t,\omega,\cdot\right),\frac{\partial}{\partial t}v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\rangle_H = -\left\|\Delta v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2-\left\langle\Delta v\left(t,\omega,\cdot\right),F\left(u\left(t,\omega,\cdot\right)\right)\right\rangle_H\\ &\qquad-\left\langle\Delta v\left(t,\omega,\cdot\right),\Delta B\left(t,\omega,\cdot\right)\right\rangle_H\\ &\quad\leq -\left\|\Delta v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2+\beta\left\|u\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+\gamma\left\|u\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_Z^{2m}+p_1\left(t,\omega\right)\\ &\qquad+\frac{1}{2}\left\|\Delta v\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta B\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2,\qquad\text{por (1.8)}\\ &\quad\leq\beta\left\|u\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+\gamma\left\|u\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_Z^{2m}+p_4\left(t,\omega\right),\end{aligned}$$

donde $p_4(t,\omega):=p_1\left(t,\omega\right)+\frac{1}{2}\left\|\Delta B\left(t,\omega,\cdot\right)\right\|_H^2$ tiene las mismas propiedades de crecimiento de p_1 y p_2. Integrando la desigualdad anterior en $t\in[s,0]$ con $s<0$, se tiene

$$\left\|v\left(0,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2\leq\left\|v\left(s,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+\int_s^0 2\left\{\beta\left\|u\left(\sigma,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+\gamma\left\|u\left(\sigma,\omega,\cdot\right)\right\|_Z^{2m}+p_4\left(\sigma,\omega\right)\right\}\mathrm{d}\sigma.$$

Integrando respecto a s en $[-1,0]$, haciendo cambio en el orden de integración y usando en hecho que $\left\|u\left(z,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2\leq 2\left\|v\left(z,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+2\left\|B\left(z,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2$ para todo $z\in\mathbb{R}$ y $\omega\in\Omega$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\left\|v\left(0,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2 &\leq\int_{-1}^{0}\left\|v\left(s,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_{-1}^{0}\left\{4\beta\left\|v\left(\sigma,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+4\beta\left\|B\left(\sigma,\omega,\cdot\right)\right\|_V^2+2\gamma\left\|u\left(\sigma,\omega,\cdot\right)\right\|_Z^{2p}+2p_4\left(\sigma,\omega\right)\right\}\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

Del Lema 1.3.21 y la desigualdad anterior se obtiene:

Lema 1.3.22. *Existe un radio aleatorio* $r_2(\omega) > 0$ *tal que para todo* $\rho > 0$, *existe un* $\bar{t} \leq -1$ *determinista para el cual se tiene la siguiente propiedad para casi todo* $\omega \in \Omega$*: para todo* $t_0 \leq \bar{t}$ *y todo* $u_0 \in H$ *tal que* $\|u_0(\cdot)\|_H \leq \rho$, *si* $v(t, \omega, x; t_0, u_0(x) - B(t, \omega, x))$ *es la solución de la ecuación* (1.7) *sobre* $t \in [t_0, \infty)$, *con* $v(t_0, \omega, x) = u_0(x) - B(t_0, \omega, x)$ *y* u_0 *la condición inicial no aleatoria de* (1.4), *entonces se cumple la desigualdad:*

$$\|u(0, \omega, \cdot; t_0, u_0)\|_V^2 \leq r_2^2(\omega).$$

Demostración. Basta notar que $B(0, \omega, x) = 0$, para todo $\omega \in \Omega$ y $x \in D$. Así

$$\|u(0, \omega, \cdot; t_0, u_0(\cdot))\|_V^2 = \|v(0, \omega, \cdot; t_0, v(t_0, \omega, \cdot))\|_V^2$$

y el resultado se sigue de la desigualdad previa al presente lema. ■

Para finalizar esta sección, como se observó en en el Teorema 1.3.19,

$$\varphi(t - t_0, \vartheta_{t_0}(\omega), u_0(\cdot)) := u(t, \omega, \cdot; t_0, u_0(\cdot)), \text{ para } t \geq t_0,$$

con $\vartheta_s(\omega(\cdot)) = \omega(\cdot + s) - \omega(s)$, define un SDA (ϑ, φ) sobre (H, d_H). Tomando $t = 0$, y $t_0 = -s$, con $s \geq 1$ se llega a que

$$\varphi(s, \vartheta_{-s}(\omega), u_0(\cdot)) = u(0, \omega, \cdot; -s, u_0(\cdot)),$$

y así, por el lema anterior y el hecho que la incrustación $V \hookrightarrow H$ es compacta, entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|\varphi(s, \vartheta_{-s}(\omega), u_0(\cdot))\|_H^2 \leq M \|\varphi(s, \vartheta_{-s}(\omega), u_0(\cdot))\|_V^2 \leq M r_2^2(\omega)$$

es decir, existe una bola aleatoria $\mathscr{K}(\omega)$ (de radio $r_2(\omega)$, $\omega \in \Omega$) tal que

$$\varphi(s, \vartheta_{-s}(\omega), u_0(\cdot)) \subset \mathscr{K}(\omega),$$

para todo $u_0 \in H$ tal que $\|u_0(\cdot)\|_H \leq \rho$, para cualesquiera $\rho > 0$. De esta forma, la bola aleatoria, la cual es compacta, absorbe a todos los subconjuntos acotados de H. Por el Teorema 1.3.10 se sigue la existencia de un atractor global para el SDA (ϑ, φ) sobre (H, d_H).

§1.4 Atractores fuertes y débiles para SDA's

Los atractores juegan un papel importante en la teoría de sistemas dinámicos. Como se vio anteriormente, un atractor global para un SDM es un conjunto aleatorio compacto el cual atrae todas las trayectorias que pasan por conjuntos acotados, a medida que el tiempo tiende al infinito. En general, los SDA modelan dinámicas influenciadas o perturbadas por un ruido aleatorio. Para este tipo de sistemas no existe un subconjunto del espacio de estados que "atrape" la dinámica para tiempos "grandes". Por lo tanto, es razonable definir en el caso de SDA a los atractores como conjuntos aleatorios.

Tales conjuntos aleatorios han sido definidos y estudiados por diferentes autores usando la idea de convergencia hacia atrás. En este sentido, en vez de avanzar en el tiempo hacia el infinito, se considera la evolución del sistema desde $-t$, para $t \geq 0$. Al hacer $t \to \infty$, se puede encontrar un objeto (el atractor, en caso de existir) el cual da el comportamiento del sistema en el "pasado".

En general, un atractor para un SDA debería describir de alguna manera, el comportamiento de la dinámica del sistema en el futuro; pero los atractores fuertes, como se vio anteriormente, solo tienen en cuenta la dinámica del pasado. Sin embargo, para SDA's existe una "conexión entre el pasado y el futuro", debido a la estacionariedad del ruido. De esta forma, la convergencia hacia atrás, implica una convergencia hacia adelante, aunque en un sentido débil: la convergencia en probabilidad.

Con lo anterior en mente, en esta sección se toma comopunto de partida la definición de atractor fuerte o hacia atrás dada en la sección anterior y se sigue con la idea intuitiva que un atractor aleatorio es siempre un conjunto aleatorio compacto el cual es "invariante" (esto indica que se mueve con el paso del tiempo, pero de manera estacionaria) bajo el SDA. A partir de ello se darán condiciones suficientes y necesarias para la existencia de tales conjuntos.

Por último, las nociones aquí presentadas se basan en el artículo de Crauel et al. [14].

1.4.1 Criterios

Definición 1.4.1. Sea (ϑ, φ) un SDA sobre (E, d_E). Sea $\mathcal{B} \subseteq \wp(E)$ un subconjunto arbitrario. Un conjunto aleatorio $\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ se dice que es un *atractor fuerte* de $\mathcal{B}$ para φ si

(a) $\mathscr{A}$ es un conjunto aleatorio compacto,

(b) $\mathscr{A}$ es invariante respecto a φ,

(c) $\lim_{t\to\infty} d\left(\varphi\left(t, \vartheta_{-t}(\omega), B\right), \mathscr{A}(\omega)\right) = 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$ y para todo $B \in \mathcal{B}$ (en términos de la Definición 1.3.4, $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a $\mathcal{B}$).

En particular, un atractor fuerte de $\mathcal{B}$ es llamado

- *B-atractor fuerte* para φ en el caso que $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los subconjuntos acotados de E (es decir, $\mathscr{A}$ es un atractor global para φ de acuerdo a la Definición 1.3.7).

- *C-atractor fuerte* para φ en el caso que $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los subconjuntos compactos de E.

De la definición anterior, tiene sentido hablar de un conjunto aleatorio $\mathscr{A}$ que sea *fuertemente B-atrayente*, es decir, $\mathscr{A}$ atrae a la familia de todos los subconjuntos acotados de E, en el sentido de la Definición 1.3.4; análogamente se hablará de conjuntos que sean f*uertemente C-atrayentes*. Es de mencionar que la propiedad de ser acotado está relacionada con la métrica

d_E mientras que la de compacidad no lo es. Además, la definición anterior puede modificarse si se exige que $\mathcal{B}$ sea un conjunto aleatorio, y este caso, la propiedad (c) es sustituida por la propiedad

$\lim_{t\to\infty} d\left(\varphi\left(t,\vartheta_{-t}\left(\omega\right),B\left(\vartheta_{-t}\left(\omega\right)\right)\right),\mathscr{A}\left(\omega\right)\right)=0$ para casi todo $\omega\in\Omega$.

Definición 1.4.2. Sea (ϑ,φ) un SDA sobre (E,d_E). Sea $\mathcal{B}\subseteq\wp\left(E\right)$ un subconjunto arbitrario. Un conjunto aleatorio $\{\mathscr{A}\left(\omega\right)\}_{\omega\in\Omega}$ se dice que es un *atractor débil* de $\mathcal{B}$ para φ si se cumplen las condiciones (a) y (b) de la Definición 1.4.1 y además se cumple

($\bar{c}$) $\mathbb{P}-\lim_{t\to\infty} d\left(\varphi\left(t,\omega,B\right),\mathscr{A}\left(\vartheta_t\left(\omega\right)\right)\right)=0$ para todo $B\in\mathcal{B}$.

Si la condición ($\bar{c}$) se cumple para casi todo $\omega\in\Omega$, se dice que $\{\mathscr{A}\left(\omega\right)\}_{\omega\in\Omega}$ es un *atractor hacia adelante* de $\mathcal{B}$.

Como en la Definición 1.4.1, tiene sentido hablar de *B-atractores débiles* y *C-atractores débiles* para φ. De manera análoga, también se hablará de conjuntos *débilmente B-atrayentes* y *débilmente C-atrayentes.*

Criterios para determinar atractores fuertes

Supóngase que (ϑ,φ) es un SDA sobre (E,d_E) tal que φ es continuo. Dado $A\subseteq E$, se denota una vecindad cerrada de A de radio δ (en la métrica d_E) como $A^\delta:=\{x\in E: d\left(x,A\right)\leq\delta\}$.

Teorema 1.4.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un conjunto aleatorio $\mathscr{A}$ es cual es un B-atractor fuerte.*

2. *Para todo $\epsilon>0$ existe un conjunto compacto C_ϵ tal que para todo $\delta>0$ y todo $B\subseteq E$ cerrado y acotado se tiene*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega: B\subseteq\bigcup_{s\geq0}\bigcap_{t\geq s}\varphi\left(t,\vartheta_{-t}\left(\omega\right),\cdot\right)^{-1}\left(C_\epsilon^\delta\right)\right\}\right)\geq1-\epsilon.$$

3. *Existe un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{K}$ el cual es un fuertemente B-atrayente.*

Demostración. En lo que sigue, se supondrá que $\mathcal{B}$ es la familia de todos los conjuntos acotados de E. Primero se demuestra que *1.* implica *3.* Puesto que un B-atractor fuerte es por definición un conjunto aleatorio compacto el cual atrae fuertemente a la familia de todos los subconjuntos acotados de E, entonces la condición 3. se cumple.

3. implica *1.* Se verá que la condición 3. implica que todos los Ω límites de $\mathcal{B}$ son invariantes respecto a φ. Por el Lema 1.3.3 se sabe que $\Omega_B\left(\omega\right)$ es débilmente invariante respecto a φ, para todo $B\in\mathcal{B}$. Para ver la contención $\Omega_B\left(\vartheta_t\left(\omega\right)\right)\subseteq\varphi\left(t,\omega,\Omega_B\left(\omega\right)\right)$, sea $y\in\Omega_B\left(\vartheta_t\left(\omega\right)\right)$, entonces $\lim_{n\to\infty} d\left(\varphi\left(t_n,\vartheta_{-t_n}\left(\vartheta_t\left(\omega\right)\right),b_n\right),y\right)=0$, para alguna sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ tal que $t_n\to\infty$ y alguna sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B$. Dado $t\in\mathbb{R}$, sea $M=\{n\in\mathbb{N}: t_n-t\geq0\}$ y considérese la sucesión

$$\left\{\varphi\left(t_n-t,\vartheta_{-(t_n-t)}\left(\omega\right),b_n\right)\right\}_{n\in M}\subseteq E.$$

Puesto que $\mathscr{K}$ atrae fuertemente a $\mathcal{B}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\varphi\left(t_n - t, \vartheta_{-(t_n-t)}(\omega), b_n\right), \mathscr{K}(\omega)\right) = 0.$$

Por lo observado (al principio de la demostración de la Proposición 1.3.6.), se sabe que existe una sub-sucesión

$$\left\{\varphi\left(t_{n_k} - t, \vartheta_{-\left(t_{n_k}-t\right)}(\omega), b_{n_k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E,$$

$n_k \in M$, la cual converge a algún punto $z(\omega)$. Claramente $z(\omega) \in \Omega_B(\omega)$ por la caracterización de la Definición 1.3.2. Usando la continuidad de $\varphi(t,\omega)$ se concluye que

$$\begin{aligned}\varphi(t,\omega,z(\omega)) &= \lim_{k\to\infty} \varphi\left(t,\omega,\varphi\left(t_{n_k} - t, \vartheta_{-\left(t_{n_k}-t\right)}(\omega), b_{n_k}\right)\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} \varphi\left(t_{n_k}, \vartheta_{-\left(t_{n_k}-t\right)}(\omega), b_{n_k}\right) = y,\end{aligned}$$

por lo tanto $\Omega_B(\vartheta_t(\omega)) \subseteq \varphi(t,\omega,\Omega_B(\omega))$.

Por otra parte, nótese que $\mathcal{B}$ es contablemente generada, es decir, existe una familia contable $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}$ existe $B_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $B \subseteq B_0$ (tomando $\mathcal{B}_0 = \{B_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B_x^r := \{y \in E : d(y,x) \leq r\}$, $x \in E$ y $r > 0$), y así, de la Definición 1.3.2, $\Omega_B(\omega) \subseteq \Omega_{B_0}(\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$. Sea

$$\mathscr{A}(\omega) := \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \Omega_B(\omega)} = \overline{\bigcup_{B_0\in\mathcal{B}_0} \Omega_{B_0}(\omega)}.$$

El hecho que $\mathcal{B}_0$ sea contable y el Lema 1.3.9 implica que $\mathscr{A}(\omega) \subseteq \mathscr{K}(\omega)$, para casi todo $\omega \in \Omega$, y en particular, $\mathscr{A}(\omega)$ es compacto, para casi todo $\omega \in \Omega$. Más aún se cumple que

$$\varphi(t,\omega,\mathscr{A}(\omega)) \subseteq \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \varphi(t,\omega,\Omega_B(\omega))} \subseteq \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \Omega_B(\vartheta_t(\omega))} = \mathscr{A}(\vartheta_t(\omega)),$$

donde se ha usado el hecho que Ω_B es débilmente invariante respecto a φ. Por otra parte, del hecho que Ω_B es invariante respecto a φ se tiene que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \Omega_B(\vartheta_t(\omega)) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \varphi(t,\omega,\Omega_B(\omega)) \subseteq \varphi(t,\omega,\mathscr{A}(\omega)).$$

Puesto que $\mathscr{A}(\omega)$ es compacto, también lo es $\varphi(t,\omega,\mathscr{A}(\omega))$ es compacto, y así

$$\mathscr{A}(\vartheta_t(\omega)) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \Omega_B(\vartheta_t(\omega))} = \varphi(t,\omega,\mathscr{A}(\omega)),$$

de donde se concluye que $\mathscr{A}$ es invariante respecto a φ. Ahora se verá que $\mathscr{A}$ es un B-atractor fuerte. En efecto, nótese que Ω_B atrae a B, para todo $B \in \mathcal{B}$, pues si no fuera así, existirían $B \in \mathcal{B}$, $\delta > 0$, una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ con $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), b_n), \Omega_B(\omega)) > \delta. \tag{1.15}$$

Sin embargo, el hecho que $\mathscr{K}$ atraiga fuertemente a $\mathcal{B}$, implica, por lo observado al principio del Lema 1.3.3, que $\{\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ posee una sub-sucesión convergente, y cuyo punto límite está en Ω_B, lo cual contradice (1.15). Por lo tanto Ω_B es un B-atractor fuerte; pero $\Omega_B(\omega) \subseteq \mathscr{A}(\omega)$ para todo $B \in \mathcal{B}$, por lo que $\mathscr{A}$ también es un B-atractor fuerte.

1. implica *2.* Sea $\epsilon > 0$. Puesto que E es un espacio polaco y el atractor $\mathscr{A}$ es una variable aleatoria que toma valores en los conjuntos compactos de E, entonces, por el Lema A.2.6 existe un subconjunto compacto $C_\epsilon \subseteq E$ tal que

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathscr{A}(\omega) \subseteq C_\epsilon\}) \geq 1 - \epsilon.$$

Para $\delta > 0$ y cualquier subconjunto cerrado y acotado $B \subseteq E$ se tiene

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : B \subseteq \bigcup_{s\geq 0}\bigcap_{t\geq s} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \cdot)^{-1}\left(\mathscr{A}^\delta(\omega)\right)\right\}\right) = 1.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : B \subseteq \bigcup_{s\geq 0}\bigcap_{t\geq s} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \cdot)^{-1}\left(C_\epsilon^\delta\right)\right\}\right) \\
&\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : B \subseteq \bigcup_{s\geq 0}\bigcap_{t\geq s} \varphi(t, \vartheta_{-t}(\omega), \cdot)^{-1}\left(\mathscr{A}^\delta(\omega)\right)\right\}\right) - \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathscr{A}(\omega) \nsubseteq C_\epsilon\}) \\
&\geq 1 - \epsilon,
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado 2.

2. implica *1.* Considérese una sucesión de conjuntos $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subseteq E$ acotados y cerrados en E tales que para cada subconjunto acotado $B \subseteq E$ existe algún B_k, $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \subseteq B_k$. Por ejemplo, cada B_k puede ser tomado como $B_{x_0}^k$, para algún $x_0 \in E$. Sea

$$\mathscr{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_{B_k}(\omega)}.$$

Sea $\epsilon > 0$. Puesto que *2.* implica que existe un conjunto compacto $C_\epsilon \subseteq E$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $\delta > 0$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \Omega_{B_k}(\omega) \subseteq C_\epsilon^\delta\right\}\right) \geq 1 - \epsilon,$$

lo que implica que $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathscr{A}(\omega) \subseteq C_\epsilon\}) \geq 1-\epsilon$. En particular, $\mathscr{A}(\omega)$ y $\Omega_{B_k}(\omega)$ son conjuntos aleatorios compactos para todo $k \in \mathbb{N}$ y para casi todo $\omega \in \Omega$. Ahora se verificará que Ω_{B_k} es invariante respecto a φ, para todo $k \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $\Omega_{B_k}(\omega)$ es débilmente invariante para φ por el Lema 1.3.3. Para demostrar la contención $\Omega_{B_k}(\vartheta_t(\omega)) \subseteq \varphi(t, \omega, \Omega_{B_k}(\omega))$, sea $\epsilon > 0$ fijo, $t \geq 0$ y sea $y \in \Omega_{B_k}(\vartheta_t(\omega))$. Entonces $\lim_{n\to\infty} d(\varphi(t_n, \vartheta_{-t_n}(\vartheta_t(\omega)), b_n), y) = 0$, para alguna sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_k$. Considere como antes, el conjunto $M := \{n \in \mathbb{N} : t_n - t \geq 0\}$ y la sucesión $\left\{\varphi\left(t_n - t, \vartheta_{-(t_n-t)}(\omega), b_n\right)\right\}_{n\in M}$. Entonces para $\omega \in \Omega$ tal que que $\Omega_{B_k}(\omega) \subseteq C_\epsilon$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}\left(\vartheta_t(\omega)\right)\right), b_n\right), C_\epsilon) = 0.$$

Esto implica que existe una sub-sucesión $\left\{\varphi\left(t_{n_k} - t, \vartheta_{-\left(t_{n_k}-t\right)}(\omega), b_{n_k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $t_{n_k} - t \geq 0$ que converge a $z(\omega) \in \Omega_{B_k}(\omega)$. De esta forma

$$\varphi(t, \omega, z(\omega)) = \lim_{k\to\infty} \varphi\left(t_{n_k}, \vartheta_{-\left(t_{n_k}-t\right)}(\omega), b_{n_k}\right) = y(\omega),$$

y así,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \Omega_{B_k}\left(\vartheta_t(\omega)\right) \subseteq \varphi\left(t, \omega, \Omega_{B_k}(\omega)\right)\right\}\right) \geq 1 - \epsilon.$$

Como la anterior desigualdad se cumple para todo $\epsilon > 0$, se concluye que $\Omega_{B_k}(\omega)$ es invariante respecto a φ, y por lo tanto, también lo es $\mathscr{A}(\omega)$. Resta demostrar que $\mathscr{A}(\omega)$ es un B-atractor fuerte. Es suficiente mostrar que $\mathscr{A}$ es un atractor fuerte de los conjuntos B_k (los cuales forman un generador de $\mathcal{B}$). Nótese que para casi todo $\omega \in \Omega$ se cumple que $\Omega_{B_k}(\omega)$ atrae fuertemente a B_k, para todo $k \in \mathbb{N}$, ya que si no fuera cierto, existiría un $\delta > 0$, una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ con $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_k$ tal que

$$d\left(\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), b_n\right), \Omega_{B_k}(\omega)\right) > \delta, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

con probabilidad positiva. Puesto que $\{\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), b_n\right)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una sub-sucesión que converge con probabilidad al menos $1 - \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, el límite de dicha sub-sucesión debe estar en $\Omega_{B_k}(\omega)$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, $\Omega_{B_k}(\omega)$ atrae B_k y así $\mathscr{A}(\omega)$ es un B-atractor fuerte. ■

El resultado anterior dice intuitivamente que para que exista un atractor fuerte para la clase de los conjuntos acotados de E, es suficiente y necesario que exista un conjunto aleatorio compacto el cual atraiga a todos los subconjuntos acotados. Por otra parte, la condición 2. evoca la definición de tensión.

Teorema 1.4.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un conjunto aleatorio $\mathscr{A}$ es cual es un C-atractor fuerte.*

2. *Para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto C_ϵ tal que para todo $\delta > 0$ y todo $K \subseteq E$ compacto se tiene*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : K \subseteq \bigcup_{s\geq 0} \bigcap_{t\geq s} \varphi\left(t, \vartheta_{-t}(\omega), \cdot\right)^{-1}\left(C_\epsilon^\delta\right)\right\}\right) \geq 1 - \epsilon.$$

3. *Existe un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{K}$ el cual es un fuertemente C-atrayente.*

Demostración. La equivalencia entre las condiciones *1.* y *3.*, al igual que el hecho que la condición *1.* implica la condición *2.*, se sigue de la demostración anterior. Ahora se verificará que *2.* implica *1.* Considere, para cada $k \in \mathbb{N}$, un conjunto $C_{1/k}$ que cumpla la condición 2., y sea

$$\mathscr{A}(\omega) := \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_{C_{1/k}}(\omega)}.$$

Como en la demostración del teorema anterior, obsérvese que $\mathscr{A}$ es un conjunto aleatorio compacto e invariante, por lo tanto resta demostrar que $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a todo conjunto compacto $K \subseteq E$. Sea $K \subseteq E$ un conjunto compacto, entonces por Ω_K es invariante (por un argumento similar al del teorema anterior). De esta forma, dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$1 - \frac{1}{n} \leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \Omega_K(\omega) \subseteq C_{1/n}\right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \Omega_K(\omega) \subseteq \Omega_{C_{1/n}}\right\}\right),$$

donde se ha usado el Lema A.2.7 para la segunda desigualdad. Por lo tanto $\Omega_K(\omega) \subseteq \mathscr{A}(\omega)$, para casi todo $\omega \in \Omega$, y así $\mathscr{A}$ atrae fuertemente a K, es decir, $\mathscr{A}$ es un C-atractor fuerte. ■

Criterios para determinar atractores débiles

En esta apartado se presentan resultados similares a los probados en el apartado anterior. La gran diferencia radica en que la propiedad 2. de los Teoremas 1.4.3 y 1.4.4 se cumple uniformemente en el tiempo, mientras que para atractores débiles, dicha propiedad se cumplirá puntualmente en el tiempo. Como antes, (ϑ, φ) es un SDA sobre (E, d_E) tal que φ es continuo en E, y si $A \subseteq E$, se denota una vecindad cerrada de A de radio δ como A^δ.

Teorema 1.4.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un conjunto aleatorio $\mathscr{A}$ es cual es un B-atractor débil.*

2. *Para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto C_ϵ tal que para todo $\delta > 0$ y todo $B \subseteq E$ cerrado y acotado, existe $t_0 > 0$ con la propiedad que para todo $t \geq t_0$*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi(t, \omega, B) \subseteq \left(C_\epsilon^\delta\right)\right\}\right) \geq 1 - \epsilon.$$

3. *Existe un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{K}$ el cual es débilmente B-atrayente.*

Demostración. Claramente *1.* implica *3.* por definición.

3. implica *2.* Sea $\mathscr{K}$ un conjunto aleatorio compacto el cual es débilmente B-atrayente. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que E es un espacio Polaco y $\mathscr{K}$ es una variable aleatoria que toma valores en los subconjuntos compactos de E, entonces por el Lema A.2.6, existe un subconjunto compacto $C_\epsilon \subseteq E$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \subseteq C_\epsilon\right\}\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Por la Observación 1.3.8, para todo $\delta > 0$ y todo subconjunto acotado $B \subseteq E$, existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \vartheta_{-t}\left(\omega\right), B\right) \subseteq \mathscr{K}^{\delta}\left(\omega\right)\right\}\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, para todo $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \omega, B\right) \nsubseteq C_{\epsilon}^{\delta}\right\}\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \vartheta_{-t}\left(\omega\right), B\right) \nsubseteq C_{\epsilon}^{\delta}\right\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \vartheta_{-t}\left(\omega\right), B\right) \nsubseteq \mathscr{K}^{\delta}\left(\omega\right)\right\}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}\left(\omega\right) \nsubseteq C_{\epsilon}\right\}\right) \leq \epsilon,\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado 2.

2. implica *1.* Sea $x_0 \in E$ un punto fijo de E y considere un conjunto cerrado $B_{x_0}^{k} \subseteq E$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $C_{2^{-k}}^{1} \subseteq B_{x_0}^{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Defínase recursivamente una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, tal que $u_n > n$, $n \in \mathbb{N}$ y

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} u_k, \omega, B_n\right) \subseteq C_{2^{-m}}^{1/n}\right\}\right) \geq 1 - 2^{m}, \quad m \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.16}$$

y

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(u - n, \omega, B_n\right) \subseteq B_{n-1}\right\}\right) \geq 1 - 2^{-n+1}, \quad \text{para todo } u \geq u_n, n \geq 2. \tag{1.17}$$

Defínase $t_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$\mathscr{A}\left(\omega\right) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} \varphi\left(t_k, \vartheta_{-t_k}\left(\omega\right), B_k\right)}.$$

Entonces la desigualdad (1.17) implica que

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(u_k, \omega, B_k\right) \nsubseteq B_{k-1}\right\}\right) < \infty,$$

por lo tanto, por la parte trivial de Lema de Borel-Cantelli, se tiene que existe un conjunto $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}\left(\Omega_0\right) = 1$ y para todo $\omega \in \Omega_0$ existe $j_0\left(\omega\right) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi\left(u_j, \vartheta_{-t_j}\left(\omega\right), B_j\right) \subseteq B_{j-1}$$

para todo $j \geq j_0\left(\omega\right)$ (donde se ha usado la invariancia de ϑ_t preserva medida para todo $t \in \mathbb{R}$). En particular, usando la propiedad de cociclo se tiene:

$$\mathscr{A}\left(\omega\right) = \bigcap_{j=j_0(\omega)} \overline{\varphi\left(t_j, \vartheta_{-t_j}\left(\omega\right), B_j\right)}, \quad \omega \in \Omega_0.$$

Se afirma que $\mathscr{A}$ es un B-atractor débil. Primero se demuestra que $\mathscr{A}$ es un conjunto aleatorio compacto. Fíjese $m \in \mathbb{N}$; usando (1.16) se obtiene que para todo $n \geq m$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{A}(\omega) \subseteq C_{2^{-m}}^{1/n}\right\}\right) &\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \overline{\varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), B_n\right)} \subseteq C_{2^{-m}}^{1/n}\right\}\right) \\ &\quad - \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : j_0(\omega) > n\right\}\right) \\ &\geq 1 - 2^{-m} - \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : j_0(\omega) > n\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1 - 2^{-m},\end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{A}(\omega) \subseteq C_{2^{-m}}\right\}\right) \geq 1 - 2^{-m}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, y de esta forma $\mathscr{A}$ es compacto para casi todo $\omega \in \Omega$.

Ahora se demuestra que $\mathscr{A}$ es invariante respecto a φ. Para $t > 0$ fijo, obsérvese que

$$\varphi\left(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)\right) \subseteq \mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right).$$

En efecto, para cualesquiera $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, se escoge n lo suficientemente grande tal que
(i) $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n}(\omega), B_n\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right\}\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{3}$,
(ii) $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : j_0(\omega) > n+1\right\}\right) \leq \frac{\epsilon}{3}$,
(iii) $2^{-n} \leq \frac{\epsilon}{3}$.

Entonces

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}\left(\vartheta_t(\omega)\right)\right\}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \omega, \varphi\left(t_{n+1}, \vartheta_{-t_{n+1}}(\omega), B_{n+1}\right)\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}\left(\vartheta_t(\omega)\right)\right\}\right) \\ &\qquad - \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : j_0(\omega) > n+1\right\}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t + t_{n+1}, \vartheta_{-t_{n+1}}(\omega), B_{n+1}\right) \subseteq \varphi\left(t_n, \vartheta_{-t_n+t}(\omega), B_n\right)\right\}\right) - \frac{\epsilon}{3} \\ &\qquad - \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : j_0(\omega) > n+1\right\}\right),\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}\left(\vartheta_t(\omega)\right)\right\}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t + t_{n+1} - t_{n+1}, \vartheta_{-t_{n+1}}(\omega), B_{n+1}\right) \subseteq B_n\right\}\right) - \frac{2\epsilon}{3} \geq 1 - \epsilon,\end{aligned}$$

donde se ha usado la propiedad (i) y la propiedad de cociclo para la segunda desigualdad; la propiedad (ii) y la propiedad de cociclo para la tercera desigualdad, y la desigualdad (1.17) y la propiedad (iii) (junto con la propiedad de ciclo) para la cuarta desigualdad. Puesto que $\delta, \epsilon > 0$ son arbitrarios, esto implica que $\varphi\left(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)\right) \subseteq \mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right)$ para casi todo $\omega \in \Omega$.

Ahora se probará que $\mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right) \subseteq \varphi\left(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)\right)$ para casi todo $\omega \in \Omega$. Sea $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ arbitrarios y sea $i \in \mathbb{N}$ tal que
(i) $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t_i, \vartheta_{-t_i}(\omega), B_i\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right\}\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{3}$, y así

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \overline{\varphi\left(t, \omega, \varphi\left(t_i, \vartheta_{-t_i}(\omega), B_i\right)\right)} \subseteq \overline{\varphi\left(t, \omega, \mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right)}\right\}\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{3}, \qquad (1.18)$$

(ii) $\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : j_0(\omega) > n+1\}\right) \leq \frac{\epsilon}{3}$,
(iii) $2^{-i} \leq \frac{\epsilon}{3}$,
(iv) $i \geq t-1$.
Entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right) \subseteq \overline{\varphi\left(t,\omega,\mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right)}\right\}\right)\\
&\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right) \subseteq \overline{\varphi\left(t,\omega,\varphi\left(t_i,\vartheta_{-t_i}(\omega),B_i\right)\right)}\right\}\right) - \frac{\epsilon}{3}\\
&\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \overline{\varphi\left(t_{i+1},\vartheta_{t-t_{i+1}}(\omega),B_{i+1}\right)} \subseteq \overline{\varphi\left(t,\omega,\varphi\left(t_i,\vartheta_{-t_i}(\omega),B_i\right)\right)}\right\}\right)\\
&\qquad - \mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : j_0(\omega) > i+1\}\right) - \frac{\epsilon}{3}\\
&\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \varphi\left(t_{i+1},\vartheta_{t-t_{i+1}}(\omega),B_{i+1}\right) \subseteq \varphi\left(t,\omega,\varphi\left(t_i,\vartheta_{-t_i}(\omega),B_i\right)\right)\right\}\right)\\
&\qquad - \mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : j_0(\omega) > i+1\}\right) - \frac{\epsilon}{3},
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right) \subseteq \overline{\varphi\left(t,\omega,\mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right)}\right\}\right)\\
&\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \varphi\left(t_{i+1}-t_i-t,\vartheta_{t-t_{i+1}}(\omega),B_{i+1}\right) \subseteq B_i\right\}\right)\\
&\qquad - \mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : j_0(\omega) > n+1\}\right) - \frac{\epsilon}{3} \geq 1-\epsilon,
\end{aligned}$$

donde se ha usado la desigualdad (1.18) para la primera desigualdad; la propiedad de cociclo para la cuarta desigualdad, y las propiedades (ii), (iii) y (iv) así como la propiedad (1.17) para la desigualdad final. Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces para casi todo $\omega\in\Omega$ y todo $\delta > 0$ se tiene que $\mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right) \subseteq \overline{\varphi\left(t,\omega,\mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right)}$, y en virtud del Lema (A.2.8) parte 2. se concluye que para casi todo $\omega\in\Omega$, $\mathscr{A}\left(\vartheta_t(\omega)\right) \subseteq \varphi\left(t,\omega,\mathscr{A}(\omega)\right)$.

Por último, se demostrará que para todo conjunto acotado $B\subseteq E$, $\mathscr{A}$ atrae débilmente a B. Sea $B\subseteq E$ un conjunto acotado de E, $\epsilon,\delta > 0$ cualesquiera números fijos. Entonces existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $2^{-j} \leq \frac{\epsilon}{2}$, $B\subseteq B_{j+1}$ y $\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \varphi\left(t_j,\vartheta_{-t_j}(\omega),B_j\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right\}\right) \geq 1-\frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto, para todo $t \geq t_{j+1}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \varphi\left(t,\vartheta_{-t}(\omega),B\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right\}\right)\\
&\geq \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \varphi\left(t_j,\vartheta_{-t_j}(\omega),B_j\right) \subseteq \mathscr{A}^{\delta}(\omega)\right\}\right)\\
&\qquad - \mathbb{P}\left(\left\{\varphi\left(t,\vartheta_{-t}(\omega),B_{j+1}\right) \nsubseteq \varphi\left(t_j,\vartheta_{-t_j}(\omega),B_j\right)\right\}\right)\\
&\geq 1-\epsilon,
\end{aligned}$$

donde se ha usado la propiedad (1.17) para la última desigualdad. ■

Teorema 1.4.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un conjunto aleatorio $\mathscr{A}$ es cual es un C-atractor débil.*

2. Para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto C_ϵ tal que para todo $\delta > 0$ y todo $C \subseteq E$ compacto, existe $t_0 > 0$ con la propiedad que para todo $t \geq t_0$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi(t, \omega, C) \subseteq \left(C_\epsilon^\delta\right)\right\}\right) \geq 1 - \epsilon.$$

3. Existe un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{K}$ el cual es débilmente C-atrayente.

Demostración. Por definición, *1.* implica *3.* Además, *3.* implica *2.* por un argumento similar al del teorema anterior.

Para probar *2.* implica *1.*, se seguirá la demostración del teorema anterior. De los lemas A.2.6 y A.2.9 se sigue que para toda sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\delta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existen sucesiones $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\gamma_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n > n$, al igual que subconjuntos $U_n \subseteq \left[\frac{u_n}{2}, 2u_n\right]$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $u_n \in U_n$ y $\lambda(U_n) \geq \frac{3}{2}u_n - \delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y tal que los subconjuntos $B_n := C_{2^{-n}}^{\gamma_n} \subseteq E$, $n \in \mathbb{N}$ cumplen las siguientes desigualdades:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u_i, \omega, B_n\right) \subseteq C_{2^{-m}}^{1/n}\right\}\right) \geq 1 - 2^{-m+1}, \quad \text{para todo } m \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.19}$$

y

$$\mathbb{P}\left(\{\varphi(u, \omega, B_n) \subseteq B_{n-1}\}\right) \geq 1 - 2^{-n+2}, \quad \text{para todo } u \in U_n, n \geq 2. \tag{1.20}$$

Escójase una una sucesión sumable $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y defínase $t_n := \sum_{i=1}^{n} u_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea

$$\mathscr{A}(\omega) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} \varphi\left(t_k, \vartheta_{-t_k}(\omega), B_k\right)}.$$

Defínase Ω_0 y $\omega \mapsto j_0(\omega)$ como en en el Teorema 1.4.5. Entonces se tiene que

$$\mathscr{A}(\omega) = \bigcap_{j\geq j_0(\omega)} \overline{\varphi\left(t_j, \vartheta_{-t_j}(\omega), B_j\right)}, \quad \text{para todo } \omega \in \Omega_0. \tag{1.21}$$

Nuevamente, se demostrará que $\mathscr{A}$ es un C-atractor débil.

Para demostrar la invariancia, primero se remplazan ambas condiciones (iii) del Teorema 1.4.5 por el resultado al multiplicar por 2 al lado izquierdo (esto se hace, debido al factor 2^{-n+2} que aparece en (1.20)). De esta forma todas las estimaciones se siguen, excepto que que se requiere que $t + u_{n+1} \in U_n$ y $u_i - t \in U_i$, respectivamente. De la definición de los conjuntos U_n y la sumabilidad de la sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se sigue que para casi todo todo $t > 0$ (en la mediad de Lebesgue), $t + u_n \in U_n$ y $u_n - t \in U_n$ para una infinidad de índices n. Por lo tanto:

$$T := \{t \geq 0 : \varphi(t, \omega, \mathscr{A}(\omega)) = \mathscr{A}(\vartheta_t(\omega)), \text{para casi todo } \omega \in \Omega\}$$

es tal que $\lambda(T) = \infty$. Mas aún, la propiedad de cociclo de φ permite mostrar que T es cerrado bajo la adición, y así concluir que $T = [0, \infty)$.

Resta demostrar que $\mathscr{A}$ atrae todo los subconjuntos compactos de E. Para ello, sean $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$ cualesquiera. Escójase $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k_0} > 2/\epsilon$ de forma que para todo $k \geq k_0$ se cumpla que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : d\left(\varphi\left(t_k, \vartheta_{-t_k}\left(\omega\right), B_k\right), \mathscr{A}\left(\omega\right)\right) > \delta\right\}\right) < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.22}$$

lo cual es posible debido a (1.21). Sea $C \subseteq E$ un conjunto compacto. Puesto que $B_k = C^k_{2^{-k}}$, la condición *2.* da la existencia de un tiempo $t_C > 0$ tal que para todo $t \geq t_C$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \omega, C\right) \subseteq B_k\right\}\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando la propiedad de cociclo se tiene que para todo $t \geq t_C$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\epsilon}{2} &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t, \vartheta_{-t_k+t}\left(\omega\right), C\right) \subseteq B_k\right\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t_k, \vartheta_{-t_k}\left(\omega\right), \varphi\left(t, \vartheta_{-t_k-t}\left(\omega\right), C\right)\right) \subseteq \varphi\left(t_k, \vartheta_{-t_k}\left(\omega\right), B_k\right)\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \varphi\left(t_k + t, \vartheta_{-t_k-t}\left(\omega\right), \varphi\left(t, \vartheta_{-t_k+t}\left(\omega\right), C\right)\right) \subseteq \varphi\left(t_k, \vartheta_{-t_k}\left(\omega\right), B_k\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

Junto con (1.22) se tiene que para todo $t \geq t_C + t_k$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : d\left(\varphi\left(t_t, \vartheta_{-t}\left(\omega\right), C\right), \mathscr{A}\left(\omega\right)\right) > \delta\right\}\right) < \epsilon.$$

Puesto que la anterior desigualdad se cumple para cualesquiera $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$, entonces

$$\mathbb{P} - \lim_{t\to\infty} d\left(\varphi\left(t_t, \vartheta_{-t}\left(\omega\right), C\right), \mathscr{A}\left(\omega\right)\right) = 0. \blacksquare$$

Capítulo 2
Existencia de flujos para ecuaciones diferenciales estocásticas

§2.1 Introducción

En la teoría de sistemas dinámicos deterministas, dado un sistema dinámico determinista $\left(M, \mathcal{B}(M), \lambda, \{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}\right)$, donde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es un domino (abierto conexo de $\mathbb{R}^n$), λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ restringida a M y $t \mapsto \varphi_t(x)$ una función absolutamente continua para cada $x \in \mathbb{R}^d$, existe una función medible $f : M \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz, tal que para todo $t \geq 0$ y todo $p \in M$

$$\varphi_t(p) - p = \int_0^t f(\varphi_s(p))\,\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

En este caso se dice que φ es generado por la ecuación diferencial autónoma $\dot{y}(t) = f(y(t))$, con condición inicial $y(0) = p$. Sin embargo, ¿cuándo una ecuación diferencial autónoma genera un sistema dinámico que cumpla la condición (2.1)?

Para responder la pregunta anterior en el contexto de SDA, en este capítulo se dan algunos conceptos y notaciones, basando los argumentos en Arnold [1]. Se introducen los conceptos de hélice y hélice cruda y se demuestra que bajo ciertas condiciones sobre el espacio de estados, dada una semimartingala sobre su espacio de estados, existe un SDA filtrado y una semimartingala hélice definida en este, de forma que la semimartingala y la semimartingala hélice coinciden en distribución. En la Sección §1,4 se presenta el resultado principal del capítulo, el cual establece que una ecuación diferencial estocástica de Stratonovich genera, bajo hipótesis de regularidad, un SDA. Se trabaja con este tipo de integrales porque, como se verá en el Capítulo 3, para este tipo de ecuaciones es relativamente sencillo dar condiciones sobre los coeficientes de difusión, de manera que existan atractores para el flujo.

Por último, el material presentado en este capítulo se basa en el libro de Arnold [1], y el artículo de Arnold y Scheutzow [15].

Definición 2.1.1. Sea $k, n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \delta \leq 1$. Sea $\mathscr{C}^{k,\delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ el espacio de Fréchet de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que f tiene derivadas hasta orden k las cuales son continuas, y si $\delta > 0$, entonces la k-ésima derivada es localmente Hölder continua de parámetro δ (para

$\delta = 1$ esta condición se reduce a localmente Lipschitz continua). Para cada $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, sean

$$\|f\|_{k,0,K} := \sum_{0 \leq [\alpha] \leq k} \sup_{x \in K} \|D^\alpha f(x)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \delta = 0,$$

$$\|f\|_{k,\delta,K} := \|f\|_{k,0,K} + \sum_{[\alpha]=k} \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \neq y}} \frac{\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x-y\|^\delta_{\mathbb{R}^n}}, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

las seminormas asociadas, donde $[\alpha] = \sum_i^n \alpha_i$ y $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_k} x_k} f(x)$.

Definición 2.1.2. Sea $k, n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \delta \leq 1$. Sea $\mathscr{C}_b^{k,\delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ el espacio de Banach de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que $f \in \mathscr{C}^{k,\delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y tal que las normas

$$\|f\|_{k,0} : = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n}}{1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}} + \sum_{1 \leq [\alpha] \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|D^\alpha f(x)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \delta = 0,$$

$$\|f\|_{k,\delta} : = \|f\|_{k,0} + \sum_{[\alpha]=k} \sup_{x \neq y} \frac{\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x-y\|^\delta_{\mathbb{R}^n}}, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

son finitas.

Definición 2.1.3. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq \delta \leq 1$. Defínase

$$\widetilde{\mathscr{C}_b^{k,\delta}} := \left\{ g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \|g\|^\sim_{k,\delta} < \infty \right\},$$

donde

$$\|g\|^\sim_{k,0} := \sup_{x,y} \frac{\|g(x,y)\|_{\mathbb{R}^n}}{(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})(1 + \|y\|_{\mathbb{R}^n})} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x,y} \left\| D_x^\alpha D_y^\alpha g(x,y) \right\|_{\mathbb{R}^n},$$

y si $\delta > 0$,

$$\|g\|^\sim_{k,0} := \|g\|^\sim_{k,0} + \sup_{\substack{x \neq x' \\ y \neq y'}} \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \frac{\|g(x,y) - g(x',y) - g(x,y') + g(x',y')\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x - x'\|^\delta_{\mathbb{R}^n} \|y - y'\|^\delta_{\mathbb{R}^n}}.$$

De manera análoga se define $\widetilde{\mathscr{C}^{k,\delta}}$.

Un resultado básico de la teoría de sistemas dinámicos deterministas es el siguiente: si $f \in \mathscr{C}_b^{0,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o $f \in \mathscr{C}_b^{k,0}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces la ecuación $\dot{y}(t) = f(y(t))$ genera, a través de su solución, un flujo $x \to \varphi_t(x)$, $x \in \mathbb{R}$, el cual es continuo y forma un sistema dinámico determinista de clase $\mathscr{C}^k$. De esta forma, existe una correspondencia uno a uno entre los sistemas dinámicos deterministas y los campos vectoriales asociados a ecuaciones diferenciales autónomas.

§2.2 Cálculo estocástico para tiempo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$

Durante este capítulo se supondrá que los sistemas dinámicos aleatorios están definidos sobre $\mathbb{R}^n$ dotado de la métrica inducida por la norma euclidiana $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ en $\mathbb{R}^n$, y además $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad completo.

Definición 2.2.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_s^t : s, t \in \mathbb{R}, s \leq t\}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ con las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F}_s^t \subseteq \mathcal{F}_u^v$, para cualesquiera $u \leq s \leq t \leq v$,
2. $\mathcal{F}_s^{t+} = \mathcal{F}_s^t$ y $\mathcal{F}_{s-}^t = \mathcal{F}_s^t$ para cualesquier $s \in (-\infty, t]$, donde $\mathcal{F}_s^{t+} = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_s^u$ y $\mathcal{F}_{s-}^t = \bigcap_{u<s} \mathcal{F}_u^t$,
3. $\mathcal{F}_s^t$ contiene todos los conjuntos de medida nula respecto a $\mathbb{P}$, para cualesquier $s \in (-\infty, t]$.

Entonces $\{\mathcal{F}_s^t : s, t \in \mathbb{R}, s \leq t\}$ es llamada una *filtración bilateral* sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definición 2.2.2. Sea $\{\mathcal{F}_s^t : s, t \in \mathbb{R}, s \leq t\}$ una filtración bilateral sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un mapeo medible en la σ-álgebra producto.

1. $\{F(u, v, \cdot) : u, v \in \mathbb{R}\}$ es llamada una *semimartingala hacia adelante* si para cada $s \in \mathbb{R}$, $\{F(s, s+t, \cdot)\}_{t \geq 0}$ es una semimartingala respecto a $\{\mathcal{F}_s^{s+t}\}_{t \geq 0}$.
2. $\{F(u, v, \cdot) : u, v \in \mathbb{R}\}$ es llamada una *semimartingala hacia atrás* si para cada $s \in \mathbb{R}$, $\{F(s, s-t, \cdot)\}_{t \geq 0}$ es una semimartingala respecto a $\left\{\mathcal{F}_{s-t}^s\right\}_{t \geq 0}$.
3. $\{F(u, v, \cdot) : u, v \in \mathbb{R}\}$ es llamada una *semimartingala* si es una semimartingala hacia adelante y hacia atrás.

Nótese que en la definición anterior no se dice que F sea una semimartingala respecto a una filtración en particular puesto que NO lo es en el sentido usual de la definición.

Definición 2.2.3. Sea $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}\right)$ un sistema dinámico métrico, sea $\mathcal{F}$ la completación de $\mathcal{F}^0$ con los conjuntos de medida nula respecto $\mathbb{P}$, y $\{\mathcal{F}_s^t\}_{s \leq t}$ una filtración bilateral para el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La quíntupla $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \{\mathcal{F}_s^t\}_{s \leq t}\right)$ es llamada *sistema dinámico filtrado*, si para cualesquiera $s, t, u \in \mathbb{R}$, $s \leq t$ se cumple que

$$\vartheta_u^{-1}\left(\mathcal{F}_s^t\right) = \mathcal{F}_{s+u}^{t+u}.$$

Observación 2.2.4. de Sam Lázaro y Meyer [4] describen una forma de construir un sistema dinámico filtrado a partir de cualquier sistema dinámico métrico. A continuación se muestra este procedimiento.

Sean $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}\right)$ y $\mathcal{F}$ como en la definición anterior. Sean $\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^- \subseteq \mathcal{F}$ dos σ-álgebras, tales que para todo $N \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(N) = 0$ se cumple que $N \in \mathcal{A}^+ \cap \mathcal{A}^-$ y

$$\vartheta_t^{-1}\left(\mathcal{A}^+\right) \subseteq \mathcal{A}^+ \quad \text{para todo } t \geq 0, \qquad \text{y} \qquad \vartheta_t^{-1}\left(\mathcal{A}^-\right) \subseteq \mathcal{A}^- \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

Se define $\mathcal{F}^t := \vartheta_t^{-1}(\mathcal{A}^-)$, $\mathcal{F}_s := \vartheta_s^{-1}(\mathcal{A}^+)$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$, y para $s \leq t$, sea $\mathcal{F}_s^t := \mathcal{F}^t \cap \mathcal{F}_s$; entonces la familia $\{\mathcal{F}_s^t : s, t \in \mathbb{R}, s \leq t\}$ es una filtración bilateral sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En efecto, primero se observa que $\{\mathcal{F}^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es una sucesión creciente ya que si $s \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^s = \vartheta_s^{-1}\left(\mathcal{A}^-\right) &= \vartheta_{s+t-t}^{-1}\left(\mathcal{A}^-\right) \\
&= \vartheta_{s+t}^{-1} \circ \vartheta_{-t}^{-1}\left(\mathcal{A}^-\right) \subseteq \vartheta_{s+t}^{-1}\left(\mathcal{A}^-\right) = \mathcal{F}^{s+t}.
\end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que $\{\mathcal{F}_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ es una sucesión decreciente. De lo anterior, para cualesquiera $u \leq s \leq t \leq v$, se cumple

$$\mathcal{F}_s^t = \mathcal{F}^t \cap \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}^v \cap \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_u^v.$$

En de Sam Lazaro y Meyer [4], pg. 4. se prueba que $\mathcal{F}_s^{t+} = \mathcal{F}_s^t$ y $\mathcal{F}_{s-}^t = \mathcal{F}_s^t$ para cualesquiera $s \leq t$. De esta forma se deduce que $\{\mathcal{F}_s^t : s, t \in \mathbb{R}, s \leq t\}$ es una filtración bilateral sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Resta verificar que para cualesquiera $s, t, u \in \mathbb{R}$, $s \leq t$ se cumple que $\vartheta_u^{-1}(\mathcal{F}_s^t) = \mathcal{F}_{s+u}^{t+u}$. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\vartheta_u^{-1}\left(\mathcal{F}_s^t\right) = \vartheta_u^{-1}\left(\mathcal{F}^t \cap \mathcal{F}_s\right) &= \vartheta_u^{-1}\left(\mathcal{F}^t\right) \cap \vartheta_u^{-1}(\mathcal{F}_s) \\
&= \vartheta_u^{-1} \circ \vartheta_t^{-1}\left(\mathcal{A}^-\right) \cap \vartheta_u^{-1} \circ \vartheta_s^{-1}\left(\mathcal{A}^+\right) \\
&= \vartheta_{t+u}^{-1}\left(\mathcal{A}^-\right) \cap \vartheta_{s+u}^{-1}\left(\mathcal{A}^+\right) = \mathcal{F}_{s+u}^{t+u}.
\end{aligned}$$

Definición 2.2.5. Sea $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}\right)$ un sistema dinámico métrico y $(H, \circ)$ un grupo. Una función $F : \mathbb{R} \times \Omega \to H$ es llamada un *cociclo* (o *hélice* en el caso que $(H, \circ)$ sea abeliano) si $F(t+s, \omega) = F(t, \vartheta_s(\omega)) \circ F(s, \omega)$, para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ y todo $\omega \in \Omega$. F es llamada *casi cociclo* (o *casi hélice* en el caso que $(H, \circ)$ se abeliano) si la relación anterior se cumple para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ y casi todo $\omega \in \Omega$.

Nótese que, en contraste con la Definición 1.2.3(1), de la Definición 2.2.5 se sigue de inmediato que $F(0, \omega) = e_H$, donde e_H es el elemento neutro del grupo H. En el siguiente resultado se verá cómo una hélice definida en $[0, \epsilon] \times \Omega$, para todo $\epsilon > 0$, puede extenderse de manera única a $\mathbb{R} \times \Omega$.

Proposición 2.2.6. *Sea $(H, \circ)$ un grupo. Si $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}\right)$ es un sistema dinámico métrico tal que para todo $\epsilon > 0$, $F : [0, \epsilon] \times \Omega \to H$ es una función que cumple:*

$$F(t+h, \omega) = F(h, \vartheta_t(\omega)) \circ F(t, \omega), \qquad \textit{para cualesquiera } 0 \leq t \leq t+h \leq \epsilon \textit{ y todo } \omega \in \Omega,$$

entonces F puede extenderse de manera única a una hélice $\bar{F}$. Si la relación anterior se cumple para casi todo $\omega \in \Omega$, entonces F puede extenderse de manera única a una hélice cruda $\bar{F}$.

Demostración. Se define $\bar{F}(s,\omega) := F(s,\omega)$, para todo $s \in [0,\epsilon]$, y por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$, se define

$$\bar{F}(k\epsilon + s,\omega) := \bar{F}(s,\vartheta_{k\epsilon}(\omega)) \circ \bar{F}(k\epsilon,\omega), \tag{2.2}$$

para todo $s \in [0,\epsilon]$; si $k \in -\mathbb{N}$,

$$\bar{F}(k\epsilon + s,\omega) := \bar{F}(s,\vartheta_{k\epsilon}(\omega)) \circ \bar{F}(\epsilon,\vartheta_{k\epsilon}(\omega))^{-1} \circ \bar{F}((k+1)\epsilon,\omega),$$

para todo $s \in [0,\epsilon]$. Se tiene que $\bar{F}$ está bien definida, es en efecto una hélice y es la única extensión de F que cumple con lo requerido. ■

A continuación se introduce una clase particular de hélices que son semimartingalas.

Definición 2.2.7. Sea $\left(\Omega,\mathcal{F}^0,\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}},\{\mathcal{F}_s^t\}_{s\leq t}\right)$ es un sistema dinámico métrico filtrado. Una hélice $F:\mathbb{R}\times\Omega\to H$ donde $(H,\circ) := (\mathbb{R}^n,+)$ es llamada una *semimartingala hélice* (o bien *semimartingala hélice hacia adelante* o bien *semimartingala hélice hacia atrás*) si la función $G:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ definida por $G(s,t,\omega) := F(t,\omega) - F(s,\omega)$ es una semimartingala (respc. semimartingala hacia adelante y semimartingala hacia atrás) en el sentido de la Definición 2.2.2.

En el siguiente teorema se verá que la existencia de una semimartingala en un espacio de Hausdorff con base contable, garantiza la existencia de una versión continua de una semimartingala hélice la cual coincide en distribución con la semimartingala.

Teorema 2.2.8. *Sea E un espacio de Hausdorff localmente compacto son base contable. Sea $\left\{\bar{\mathcal{F}}_s^t : s,t\in\mathbb{R}, s\leq t\right\}$ una filtración bilateral sobre un espacio de probabilidad completo $\left(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{\mathbb{P}}\right)$. Sea $\bar{F}:\mathbb{R}\times\bar{\Omega}\times E\to\mathbb{R}^n$ una aplicación continua en $(t,x)\in\mathbb{R}\times E$, para todo $\bar{\omega}\in\bar{\Omega}$, y tal que $\bar{F}(0,\bar{\omega},x) = 0$ para cualesquiera $x\in E$ y $\bar{\omega}\in\bar{\Omega}$. Si $G(s,t,\omega,x) := \bar{F}(t,\omega,x) - \bar{F}(s,\omega,x)$ es una semimartingala (o bien una hacia adelante o bien hacia atrás) para cada $x\in E$ y $\bar{F}$ tiene incrementos estacionarios, es decir*

$$\left\{\bar{F}(t+h,\omega,x) - \bar{F}(t,\omega,x) : x\in E, h\in\mathbb{R}\right\} \stackrel{Ley}{=} \left\{\bar{F}(s+h,\omega,x) - \bar{F}(s,\omega,x) : x\in E, h\in\mathbb{R}\right\},$$

para cualesquiera $s,t\in\mathbb{R}$, entonces existe un sistema dinámico métrico filtrado

$$\left(\Omega,\mathcal{F}^0,\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}},\left\{\mathcal{F}_s^t\right\}_{s\leq t}\right)$$

y una familia de semimartingalas (respc. hacia adelante y hacia atrás) hélice $F:\mathbb{R}\times\Omega\times E\to\mathscr{C}(E,\mathbb{R}^n)$, las cuales son continuas en cada $(t,x)\in\mathbb{R}\times E$, para todo $\omega\in\Omega$ y además $\bar{F}$ y F tienen la misma ley.

Demostración. Sea $\Omega := \mathscr{C}_0(\mathbb{R},\mathscr{C}(E,\mathbb{R}^n))$ y $\mathcal{F}^0 := \mathcal{B}(\Omega)$ la sigma álgebra de Borel (la menor sigma álgebra que contiene a los abiertos en la topología de convergencia uniforme sobre compactos de Ω (ver Apéndice A, Sección §1,1)); de igual forma se dota a $\mathscr{C}(E,\mathbb{R}^n)$ de la sigma generado por la topología de convergencia uniforme sobre compactos, $\mathcal{B}(\mathscr{C}(E,\mathbb{R}^n))$.

Se define el desplazamiento $\vartheta_\cdot : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$, y se denota por $\vartheta(t, \omega(\cdot)) := \vartheta_t(\omega(\cdot))$, como sigue:

$$\vartheta_t(\omega(s)) = \omega(t+s) - \omega(t), \quad \text{para todo } \omega \in \Omega,\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que ϑ es medible respecto a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}^0 / \mathcal{F}^0$ puesto que Ω y $\mathbb{R}$ son ambos espacios topológicos con base contable (ver *Real Analysis and Probability*, Dudley, 1989). Por otra parte se cumple que

$$\begin{aligned}\vartheta_{t+s}(\omega(\cdot)) &= \omega(t+s+\cdot) - \omega(t+s) \\ &= \vartheta_t(\omega(s+\cdot) - \omega(s)) = \vartheta_t(\vartheta_s(\omega(\cdot))), \quad \text{para } \omega \in \Omega \text{y } s, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nótese que $\bar{F}(t, \bar{\omega}, \cdot\cdot) \in \mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n)$, para todo $(t, \bar{\omega}) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$, y así, para cada $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$, $\bar{F}$ puede representarse como la variable aleatoria $X : \bar{\Omega} \to \Omega$, tal que $X(\bar{\omega}) = \bar{F}(\cdot, \bar{\omega}, \cdot\cdot)$, donde $\bar{F}(\cdot, \bar{\omega}, \cdot\cdot) : \mathbb{R} \to \mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n)$ es una aplicación dada por $t \mapsto \bar{F}(t, \bar{\omega}, \cdot\cdot)$. De esta forma, sea $\mathbb{P}$ la medida de probabilidad sobre Ω inducida por $\bar{\mathbb{P}}$, es decir

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A\}) := \bar{\mathbb{P}}\left(\left\{\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : X(\bar{\omega}) \in A\right\}\right),\ A \in \mathcal{F}^0. \tag{2.3}$$

Nótese que para todo $A \in \mathcal{F}^0$ y todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\vartheta_t \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A\}) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in \{\omega' \in \Omega : \vartheta_t(\omega') \in A\}\}) \\ &= \bar{\mathbb{P}}\left(\left\{\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : X(\bar{\omega}) \in \{\omega' \in \Omega : \vartheta_t(\omega') \in A\}\right\}\right) \\ &= \bar{\mathbb{P}}\left(\left\{\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : \vartheta_t[X(\bar{\omega})] \in A\right\}\right) \\ &= \bar{\mathbb{P}}\left(\left\{\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : \bar{F}(t+\cdot, \bar{\omega}, \cdot\cdot) - \bar{F}(t, \bar{\omega}, \cdot\cdot) \in A\right\}\right) \\ &= \bar{\mathbb{P}}\left(\left\{\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : \bar{F}(\cdot, \bar{\omega}, \cdot\cdot) \in A\right\}\right) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A\}),\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\bar{F}$ tiene incrementos estacionarios y $\bar{F}(0, \bar{\omega}, x) = 0$ para cualesquiera $(\bar{\omega}, x) \in \bar{\Omega} \times E$. De esta forma $\mathbb{P}$ es invariante respecto a ϑ. Defínase $F : \mathbb{R} \times \Omega \times E \to \mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n)$ por

$$F(t, \omega, x) := \omega(t), \quad t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, x \in E,$$

donde $\omega(t) : E \to \mathbb{R}^n$ es la función tal que $x \mapsto w(t)(x)$, para cada $x \in E$. Entonces F y $\bar{F}$ tienen la misma ley en el sentido de (2.3) y además F es una hélice con valores en en el grupo $(H, \circ) := (\mathcal{C}(E, \mathbb{R}^n), +)$ ya que

$$F(t+h, \omega, x) = \vartheta_t(\omega(h)) + F(t, \omega, x) = F(h, \vartheta_t(\omega), x) + F(t, \omega, x).$$

Sea $\mathcal{F}$ la completación de $\mathcal{F}^0$, es decir

$$\mathcal{F} := \left\{A \cup N : A \in \mathcal{F}^0, N \subseteq M \in \mathcal{F} \text{ tal que } \mathbb{P}(M) = 0\right\}$$

y se extiende $\mathbb{P}$ a $\mathcal{F}$ de manera usual, de forma que $\mathbb{P}(A \cup N) = \mathbb{P}(A)$, donde $A \cup N \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0\}$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^- &= \sigma(\mathcal{N} \cup \sigma\{\omega(s), s \leq 0\}) \\ \mathcal{A}^+ &= \sigma(\mathcal{N} \cup \sigma\{\omega(s), s \geq 0\}),\end{aligned}$$

donde $\sigma\{\omega(s), s \leq 0\} := \sigma\{\{\omega \in \Omega : \omega(s) \in A, s \leq 0\} : A \in \mathcal{B}(\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n))\}$ y análogamente se define $\sigma\{\omega(s), s \geq 0\}$.

Se cumple $\vartheta_t^{-1}(\mathcal{A}^-) \subseteq \mathcal{A}^-$ para todo $t \leq 0$ ya que si $B \in \vartheta_t^{-1}(\mathcal{A}^-)$, entonces existe $A^- \in \mathcal{A}^-$ tal que $B = \{\omega \in \Omega : \omega(t + \cdot) - \omega(t) \in A^-\}$. Supóngase que $A^- = \{\omega \in \Omega : \omega(s) \in A\}$ para algún $s \leq 0$ y algún $A \in \mathcal{B}(\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n))$, entonces de la continuidad de la suma en el espacio topológico $\mathcal{B}(\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n))$ se sigue que $A'^- := A + w(t) \in \mathcal{B}(\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n))$, y así, denotando por $w_t(s) = w(t+s)$, se concluye que para algún $A'^- \in \mathcal{B}(\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n))$:

$$B = \left\{\omega_t \in \Omega : \omega_t(s) \in A'^-\right\}$$

es decir, $B \in \mathcal{A}^-$. Como los conjuntos A^- forman una familia generadora de $\mathcal{A}^-$, entonces el resultado es válido para todo $A^- \in \mathcal{A}^-$. Análogamente se demuestra que $\vartheta_t^{-1}(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{A}^+$, para todo $t \geq 0$. Se define $\mathcal{F}^t = \vartheta_t^{-1}(\mathcal{A}^-)$, $\mathcal{F}_s = \vartheta_s^{-1}(\mathcal{A}^+)$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ y si $s \leq t$, sea $\mathcal{F}_s^t := \mathcal{F}^t \cap \mathcal{F}_s$; entonces por la Observación 2.2.4, es una filtración bilateral sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Resta demostrar que para cada $x \in E$, $F(\cdot, \cdot, x)$ es una semimartingala hélice (hacia adelante y hacia atrás). La prueba para el caso de semimartingala hélice hacia adelante es como sigue: obsérvese que el mapeo $X : \bar{\Omega} \to \Omega$ es medible respecto a $\bar{\mathcal{F}}/\mathcal{F}$ y además $\bar{X}\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P}$, ya que si $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\begin{aligned}\bar{X}\bar{\mathbb{P}}(A) &= \bar{\mathbb{P}}\left(X^{-1}(A)\right)\\ &= \bar{\mathbb{P}}\left(\left\{\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : X(\bar{\omega}) \in A\right\}\right) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A\}) = \mathbb{P}(A).\end{aligned}$$

Por otra parte, se cumple que $\mathcal{G}_s^t := X^{-1}(\mathcal{F}_s^t) \subseteq \bar{\mathcal{F}}_s^t$, para $t \geq s$. Dado que el proceso estocástico $\left\{\bar{F}(t+s, \cdot, x) - \bar{F}(s, \cdot, x)\right\}_{t \geq 0}$ es una semimartingala respecto a $\left\{\bar{\mathcal{F}}_s^{s+t}\right\}_{t \geq 0}$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$ y $s \in \mathbb{R}$, por el Teorema A.2.10 se tiene que $\left\{\bar{F}(s+t, \cdot, x) - \bar{F}(s, \cdot, x)\right\}_{u \geq 0}$ es una semimartingala respecto a $\{\mathcal{G}_s^{s+t}\}_{t \geq 0}$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$ y $s \in \mathbb{R}$. Por último, del Teorema 10.37 de Jacod [8], pg. 329, se tiene que $\{F(s+t, \cdot, x) - F(s, \cdot, x)\}_{t \geq 0}$ es una semimartingala respecto a $\{\mathcal{F}_s^{s+t}\}_{t \geq 0}$, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$ y $s \in \mathbb{R}$. La prueba para semimartingala hélice hacia atrás es análoga a lo anterior. ■

El siguiente resultado conecta el sentido clásico de semimartingala con el de semimartingala hélice.

Teorema 2.2.9. *Sea* $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \{\mathcal{F}_s^t\}_{s \leq t}\right)$ *un sistema dinámico métrico filtrado y* $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$*. Entonces* F *es una semimartingala hélice hacia adelante si y solo si* F *es una hélice y* $\{F(t, \cdot)\}_{t \geq 0}$ *es una semimartingala respecto a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t \geq 0}$*, en otras palabras,* $\{F(s+t, \cdot) - F(s, \cdot)\}_{t \geq 0}$ *es una semimartingala respecto a* $\{\mathcal{F}_s^{s+t}\}_{t \geq 0}$ *si y solo si* $F(s+t, \omega) = F(t, \vartheta_s(\omega)) + F(s, \omega)$ *para cualesquiera* $s, t \in \mathbb{R}$ *y todo* $\omega \in \Omega$*, y* $\{F(t, \cdot)\}_{t \geq 0}$ *es una semimartingala respecto a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t \geq 0}$*. De manera similar,* F *es una semimartingala hélice hacia atrás si y solo si* F *es una hélice y* $\{F(-t, \cdot)\}_{t \geq 0}$ *es una semimartingala respecto a* $\left\{\mathcal{F}_{-t}^0\right\}_{t \geq 0}$*. Por último,* F *es una semimartingala hélice si y solo si* F*es hélice y* *ambas,* $\{F(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ *y* $\{F(-t,\cdot)\}_{t\geq 0}$*, son semimartingalas respecto a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ *y* $\left\{\mathcal{F}_{-t}^0\right\}_{t\geq 0}$*, respectivamente.*

La demostración de este resultado se encuentra en Arnold [1], Proposición 2.3.10.

En el siguiente resultado muestra que una semimartingala hélice está caracterizada por sus características locales, vía la descomposición usual de de Doob.

Teorema 2.2.10. *Sea* $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\mathcal{F}_s^t\}_{s\leq t}\right)$ *un sistema dinámico filtrado dado, F una semimartingala hélice hacia adelante sobre* $\mathbb{R}^n$ *y*

$$F(t,\omega) = M^+(t,\omega) + B^+(t,\omega), \quad t\geq 0,$$

su descomposición canónica como semimartingala respecto a $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$*, donde* $\{M^+(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ *es una martingala local respecto respecto* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ *y* $\{B^+(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ *es un proceso adaptado a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ *y localmente de variación acotada. Entonces existe*

(i) un proceso creciente $\{A^+(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ *con valores en* $\mathbb{R}$*, el cual es adaptado respecto a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ *y tal que* $A^+(0,\omega)=0$*, para todo* $\omega\in\Omega$*,*

(ii) un proceso $\{b^+(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ *con valores en* $\mathbb{R}^d$ *el cual es predecible respecto a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$*, y*

(iii) un proceso $\{a^+(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ *con valores en las matrices no negativas definidas de tamaño* $n\times n$*, el cual es predecible respecto a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$*, y tal que para cualesquiera* $t\geq 0$ *y* $\omega\in\Omega$*, se tiene que*

$$B^+(t,\omega) = \int_{[0,t]} b^+(s,\omega)\, dA^+(s,\omega),$$

$$Q_{ij}^+(t,\omega) := \left\langle M_i^+(\cdot,\omega), M_j^+(\cdot,\omega)\right\rangle_t = \int_{[0,t]} a_{ij}^+(s,\omega)\, dA^+(s,\omega).$$

Demostración. Para cada $t\geq 0$ se define

$$A^+(t,\omega) := \sum_{i=1}^{d}\left(\int_{[0,t]}\left|\mathrm{d}B_i^+(s,\omega)\right| + \left\langle M_i^+\right\rangle_t\right) + t,$$

$$b_i^+(t,\omega) := \limsup_{s\uparrow t}\frac{B_i^+(t,\omega)-B_i^+(s,\omega)}{A^+(t,\omega)-A^+(s,\omega)},$$

$$a_{ij}^+(t,\omega) := \limsup_{s\uparrow t}\frac{Q_{ij}^+(t,\omega)-Q_{ij}^+(s,\omega)}{A^+(t,\omega)-A^+(s,\omega)}.$$

Entonces b_i^+ es una versión de la derivada de Radon-Nikodym de B_i^+ respecto a A^+ y a_{ij}^+ es una versión de la derivada de Radon-Nikodym de Q_{ij}^+ respecto a A^+. ∎

Obsérvese que en el resultado anterior, es posible que F sea una semimartingala hélice hacia adelante sobre $\mathbb{R}^d$ y

$$F(t,\omega) = M^-(t,\omega) + B^-(t,\omega), \quad t\leq 0,$$

su descomposición canónica como semimartingala respecto a $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\leq 0}$. En este caso se tiene que existen

(i) un proceso creciente $\{A^-(t,\cdot)\}_{t\leq 0}$ con valores en $\mathbb{R}$, el cual es adaptado respecto a $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\leq 0}$ y tal que $A^-(0,\omega)=0$, para todo $\omega\in\Omega$,

(ii) un proceso $\{b^-(t,\cdot)\}_{t\leq 0}$ con valores en $\mathbb{R}^d$ el cual es predecible respecto a $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\leq 0}$, y

(iii) un proceso $\{a^-(t,\cdot)\}_{t\leq 0}$ con valores en las matrices no negativas definidas de tamaño $n\times n$, el cual es predecible respecto a $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\geq 0}$, tal que para cualesquiera $t\leq 0$ y $\omega\in\Omega$, se tiene que

$$B^-(t,\omega)=\int_{[0,t]} b^-(s,\omega)\,\mathrm{d}A^-(s,\omega)\,,$$

$$Q_{ij}^-(t,\omega):=\left\langle M_i^-(\cdot,\omega)\,,M_j^-(\cdot,\omega)\right\rangle_t=\int_{[0,t]} a_{ij}^-(s,\omega)\,.\mathrm{d}A^-(s,\omega)$$

Definición 2.2.11. Sea $\left(\Omega,\mathcal{F}^0,\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}\,,\{\mathcal{F}_s^t\}_{s\leq t}\right)$ un sistema dinámico filtrado y F una semimartingala hélice (hacia adelante y hacia atrás). Entonces las componentes de la terna (a^+,b^+,A^+) ((a^-,b^-,A^-) respectivamente) dadas por el Teorema 2.2.10 son llamadas *características locales* de F. En caso de una semimartingala hélice, se omiten los símbolos $+$ y $-$ de forma que si $F(t,\omega)=M(t,\omega)+B(t,\omega)$, $t\in\mathbb{R}$, entonces

$$B(t,\omega)=\int_{[0,t]} b(s,\omega)\,\mathrm{d}A(s,\omega)\,,$$

$$Q_{ij}(t,\omega):=\langle M_i(\cdot,\omega)\,,M_j(\cdot,\omega)\rangle_t=\int_{[0,t]} a_{ij}(s,\omega)\,\mathrm{d}A(s,\omega)\,.$$

Observación 2.2.12. Las características locales de una semimartingala hacia adelante se han definido en términos de las características locales de la semimartingala $\{F(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ respecto a $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$. Se cumple que para cada $s\in\mathbb{R}$, la semimartingala $\{F(s+t,\cdot)-F(s,\cdot)\}_{t\geq 0}$ respecto a $\{\mathcal{F}_s^{s+t}\}_{t\geq 0}$ tiene descomposición canónica

$$F(s+t,\omega)-F(s,\omega)=M^{(s)}(t,\omega)+B^{(s)}(t,\omega)\,,$$

donde $M^{(s)}(t,\omega)=M^+(t,\vartheta_s(\omega))$ y $B^{(s)}(t,\omega)=B^+(t,\vartheta_s(\omega))$ son ambos procesos medibles respecto a $\{\mathcal{F}_s^{s+t}\}_{t\geq 0}$ y las características locales $\left(a^{(s)},b^{(s)},A^{(s)}\right)$ y (a^+,b^+,A^+) están relacionadas como sigue:

$$a^{(s)}(t,\omega)=a^+(t,\vartheta_s(\omega))\,,\ b^{(s)}(t,\omega)=b^+(t,\vartheta_s(\omega))\ \text{y}\ A^{(s)}(t,\omega)=A^+(t,\vartheta_s(\omega))\,.$$

De manera similar se obtienen las características locales para semimartingalas hélices hacia atrás y semimartingalas hélices.

§2.3 Integración estocástica y semimartingalas hélices con parámetro espacial

En este sección se desarrolla el cálculo estocástico para semimartingalas hélices que dependen de un parámetro espacial $x\in\mathbb{R}^d$. La idea general es desarrollar la teoría del cálculo estocástico para tiempo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, bajo el supuesto de la propiedad de hélice. Por analogía en los argumentos, se formularán los resultados en términos de semimartingalas hélices, pero los mismos son válidos para semimartingalas hélice hacia adelante y hacia atrás.

Definición 2.3.1. Sea $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\mathcal{F}_s^t\}_{s\leq t}\right)$ un sistema dinámico métrico filtrado, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ y $0 < \delta < 1$. Supóngase que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $F(t, \cdot, x)$ es una semimartingala hélice con valores en $(\mathbb{R}^n, +)$, es decir, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\{F(s+t, \cdot, x) - F(s, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ es una semimartingala respecto a $\{\mathcal{F}_s^{s+t}\}_{t\geq 0}$ para cada $s \in \mathbb{R}$ y $\{F(s-t, \cdot, x) - F(s, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ es una semimartingala respecto a $\left\{\mathcal{F}_{s-t}^s\right\}_{t\geq 0}$, para cada $s \in \mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sea

$$F(t, \omega, x) = M(t, \omega, x) + B(t, \omega, x), \quad t \in \mathbb{R},$$

la descomposición canónica de F, donde $\{M(t, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ y $\{M(-t, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ son martingalas respecto respecto $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ y $\left\{\mathcal{F}_{-t}^0\right\}_{t\geq 0}$, respectivamente, y $\{B(t, \cdot)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un proceso creciente. Entonces F es llamada $\mathscr{C}_b^{k,\delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$-*semimartingala hélice* si para casi todo $\omega \in \Omega$

1. $M(t, \omega, \cdot)$ y $B(t, \omega, \cdot)$ están en $\mathscr{C}_b^{k,\delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, para todo $t \in \mathbb{R}$,
2. para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $[\alpha] \leq k$, la derivada espacial $D_x^\alpha M(t, \omega, x)$ es continua en (t, x) y para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\{D_x^\alpha M(t, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ y $\{D_x^\alpha M(-t, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ son martingalas locales respecto a $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ y $\left\{\mathcal{F}_{-t}^0\right\}_{t\geq 0}$, respectivamente,
3. $D_x^\alpha B(t, \omega, x)$ es continuo en (t, x) y además, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $D_x^\alpha B(t, \omega, x)$ es localmente de variación acotada en t.

Se dirá que F es una $\mathscr{C}^{k,\delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$-*semimartingala hélice*, si para casi todo $\omega \in \Omega$, la propiedad 1. de la definición anterior se cumple en $\mathscr{C}^{k,\delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Para una semimartingala hélice con parámetro $x \in \mathbb{R}^n$, las características locales (a, b, A) dependerán de x. Sin embargo, para el desarrollo de la teoría presente, se hará el siguiente supuesto.

Supuesto 2.3.2. Para la semimartingala hélice F, existe un proceso $\{A(t, \cdot)\}_{t\in\mathbb{R}}$ con valores en $\mathbb{R}$, continuo para cada $t \in \mathbb{R}$, adaptado y creciente en $t \in \mathbb{R}$, tal que $A(0, \omega) = 0$ y:

1. existe un proceso $b : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $\{b(t, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ es medible respecto a $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ y $\{b(-t, \cdot, x)\}_{t\geq 0}$ es medible $\left\{\mathcal{F}_{-t}^0\right\}_{t\geq 0}$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, y además, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$

$$B(t, \omega, x) = \int_{[0,t]} b(s, \omega, x)\, \mathrm{d}A(s, \omega),$$

2. existe una función $a : \mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, medible respecto a la σ-álgebra producto la cual, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$:

$$Q\left(t,\omega,x,y\right) := \left\langle M\left(\cdot,\omega,x\right), M\left(\cdot,\omega,y\right)\right\rangle_t = \int_{[0,t]} a\left(s,\omega,x,y\right)\mathrm{d}A\left(s,\omega\right).$$

Las componentes de la terna (a, b, A) son llamadas las *características locales* de F.

Observe que si las características locales de F son (a, b, A), entonces por lo observado en 2.2.12, las características locales de

$$F\left(s+t,\omega,x\right) - F\left(s,\omega,x\right) = F\left(t,\vartheta_s\left(\omega\right),x\right) = M\left(t,\vartheta_s\left(\omega\right),x\right) + B\left(t,\vartheta_s\left(\omega\right),x\right)$$

son $a\left(t,\vartheta_s\left(\omega\right),x\right)$, $b\left(t,\vartheta_s\left(\omega\right),x\right)$ y $B\left(t,\vartheta_s\left(\omega\right),x\right)$.

Definición 2.3.3. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, $0 \le \delta \le 1$, y $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función medible respecto a $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$, continua y monótona no decreciente. Sea $L_{\text{loc}}\left(\mathscr{C}_b^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right),\mathrm{d}A\right)$ el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para las cuales

- $f\left(t,\cdot\right) \in \mathscr{C}_b^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
- para cada $[a, b] \subset \mathbb{R}$
$$\left|\int_{[a,b]} \left\|f\left(s,\cdot\right)\right\|_{k,\delta}\mathrm{d}A\left(s\right)\right| < \infty. \tag{2.4}$$

  Con el sistema de seminormas (2.4), $L_{\text{loc}}\left(\mathscr{C}_b^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right),\mathrm{d}A\right)$ es un espacio de Fréchet. Los espacios $L_{\text{loc}}\left(\mathscr{C}^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right),\mathrm{d}A\right)$, $L_{\text{loc}}\left(\widetilde{\mathscr{C}_b^{k,\delta}},\mathrm{d}A\right)$ y $L_{\text{loc}}\left(\widetilde{\mathscr{C}^{k,\delta}},\mathrm{d}A\right)$ se definen de manera análoga.

La Integral de Stratonovich respecto a una semimartingala hélice

Sea $F : \mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función tal que F es una $\mathscr{C}^{1,0}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$-semimartingala hélice con características locales (a, b, A), las cuales cumplen que $a \in L_{\text{loc}}\left(\widetilde{\mathscr{C}_b^{2,\delta}},\mathrm{d}A\right)$ para algún $\delta > 0$ y $b \in L_{\text{loc}}\left(\mathscr{C}^{1,0}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right),\mathrm{d}A\right)$, para todo $\omega \in \Omega$. Sea $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $\{f\left(s,t,\cdot\right) : s,t \in \mathbb{R}\}$ una semimartingala en el sentido de la Definición 2.2.2. Sea $s \in (-\infty, t]$. El límite en probabilidad

$$\begin{aligned}
I\left(s,t,\omega\right) &\equiv \int_{[s,t]} F\left(\circ\mathrm{d}^+u,\omega,f\left(s,u,\omega\right)\right)\\
&:= \mathbb{P} - \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left\{F\left(t_{k+1},\omega,f\left(s,t_{k+1},\omega\right)\right) + F\left(t_{k+1},\omega,f\left(s,t_k,\omega\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.-F\left(t_k,\omega,f\left(s,t_{k+1},\omega\right)\right) - F\left(t_k,\omega,f\left(s,t_k,\omega\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

(donde $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ y $\Delta := \text{máx}_{0\le k\le n-1} |t_{k+1} - t_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0$) existe y es una semimartingala hacia adelante, e $I(s,t,\omega)$ es la *integral hacia adelante de Stratonovich de* $f(s,t,\omega)$ *respecto a* F.

Por otra parte, sea $t \in (-\infty, s]$. El límite en probabilidad

$$\begin{aligned}
I(s,t,\omega) &\equiv \int_{[t,s]} F\left(\circ \mathrm{d}^- u, \omega, f(s,u,\omega)\right) \\
&:= \mathbb{P} - \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{F(t_{k+1},\omega, f(s,t_{k+1},\omega)) + F(t_{k+1},\omega, f(s,t_k,\omega))\right. \\
&\qquad \left. -F(t_k,\omega, f(s,t_{k+1},\omega)) - F(t_k,\omega, f(s,t_k,\omega))\right\},
\end{aligned}$$

existe y es una semimartingala hacia atrás, e $I(s,t,\omega)$ es llamada la *integral hacia atrás de Stratonovich de* $f(s,t,\omega)$ *respecto a* F.

Nótese la analogía con la integral clásica de Stratonovich: si para cualesquiera $t, u \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$F(t,\omega, f(0,u,\omega)) = g(t,\omega) B(u,\omega),$$

donde g toma valores en $\mathbb{R}$ y B toma valores en las funciones de E en $\mathbb{R}$, entonces para cualesquiera $s \le t$

$$\begin{aligned}
I(s,t,\omega) &\equiv \int_{[s,t]} F\left(\circ \mathrm{d}^- u, \omega, f(s,u,\omega)\right) \\
&:= \mathbb{P} - \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left(g(t_{k+1},\omega) + g(t_k,\omega)\right)\left(B(t_{k+1},\omega) - B(t_k,\omega)\right) \\
&\equiv \int_{[0,t]} g(t,\omega) \circ \mathrm{d}B(t,\omega).
\end{aligned}$$

En cualquier caso, $\{I(s,t,\cdot) : s,t \in \mathbb{R}\}$ es una semimartingala en el sentido de 2.2.2.

Lema 2.3.4. *Sea* $s \in \mathbb{R}$. *Para casi todo* $\omega \in \Omega$ *se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si* $t \ge 0$, *entonces*

$$\int_{[s,s+t]} F\left(\circ d^+ u, \omega, f(s,u,\omega)\right) = \int_{[0,t]} F\left(\circ d^+ u, \vartheta_s(\omega), f(s,s+u,\omega)\right).$$

En el caso que $f(s,s+t,\omega) = f(0,t,\vartheta_s(\omega))$ *para todo* $t \ge 0$,

$$\int_{[s,s+t]} F\left(\circ d^+ u, \omega, f(s,u,\omega)\right) = \int_{[0,t]} F\left(\circ d^+ u, \vartheta_s(\omega), f(0,u,\vartheta_s(\omega))\right).$$

2. *Si* $t \le 0$, *entonces*

$$\int_{[s+t,s]} F\left(\circ d^+ u, \omega, f(s,u,\omega)\right) = \int_{[t,0]} F\left(\circ d^- u, \vartheta_s(\omega), f(s,s+u,\omega)\right).$$

En el caso en que $f(s,s+t,\omega) = f(0,t,\vartheta_s(\omega))$ *para todo* $t \ge 0$,

$$\int_{[s+t,s]} F\left(\circ d^+ u, \omega, f(s,u)\right) = \int_{[t,0]} F\left(\circ d^- u, \vartheta_s(\omega), f(0,u,\vartheta_s(\omega))\right).$$

Demostración. El caso 1. se sigue del hecho de que para cualesquiera $t \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\int_{[s,s+t]} F\left(\circ \mathrm{d}^{+} u, \omega, f(s, u, \omega)\right)\\&= \mathbb{P}-\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left\{F\left(s+u_{k+1}, \omega, f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)+F\left(s+u_{k+1}, \omega, f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)\right.\\&\quad\left.-F\left(s+u_{k}, \omega, f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)-F\left(s+u_{k}, \omega, f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)\right\}.\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}&I(s, s+t, \omega)\\&= \mathbb{P}-\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left\{F\left(u_{k+1}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)+F\left(s, \omega, f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)\right.\\&\quad+F\left(u_{k+1}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)+F\left(s, \omega, f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)\\&\quad-F\left(u_{k}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)-F\left(s, \omega, f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)\\&\quad\left.-F\left(u_{k}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)-F\left(s, \omega, f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)\right.\\&= \mathbb{P}-\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left\{F\left(u_{k+1}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)+F\left(u_{k+1}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)\right.\\&\quad\left.-F\left(u_{k}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k+1}, \omega\right)\right)-F\left(u_{k}, \vartheta_{s}(\omega), f\left(s, s+u_{k}, \omega\right)\right)\right\}\\&= \int_{[0,t]} F\left(\circ \mathrm{d}^{+} u, \vartheta_{s}(\omega), f(s, s+u, \omega)\right).\end{aligned}$$

Los otros casos se demuestran de manera análoga. ∎

§2.4 SDA's a partir de EDE's

En este sección se establecerá una correspondencia uno a uno entre semimartingalas hélices y semimartingalas cociclo.

Definición 2.4.1. Sea φ un cociclo en un sistema dinámico $\left(\Omega, \mathcal{F}^{0}, \mathbb{P},\{\vartheta_{t}\}_{t \in \mathbb{R}},\{\mathcal{F}_{s}^{t}\}_{s \leq t}\right)$ filtrado, sobre $\left(\mathbb{R}^{n},\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n}}\right)$ para el cual, si $s \in \mathbb{R}$ es fijo,

$$G_{s}(t, \omega, x):=\varphi\left(t, \omega, \varphi^{-1}(s, \omega, x)\right)-x, \quad x \in \mathbb{R}^{n}, s \leq t,$$

es una $\mathscr{C}^{k, \delta}\left(\mathbb{R}^{n}, \mathbb{R}^{n}\right)$-semimartingala hélice. Entonces φ es una $\mathscr{C}^{k, \delta}\left(\mathbb{R}^{n}, \mathbb{R}^{n}\right)$-*semimartingala cociclo*. Para simplificar notación, defínase

$$G(t, \omega, x):=G_{0}(t, \omega, x)=\varphi(t, \omega, x)-x,$$

Lema 2.4.2. *Dado un sistema dinámico métrico* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P},\{\vartheta_{t}\}_{t \in \mathbb{R}}\right)$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \varphi\right)$ *es un SDA sobre* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n})$

2. $G_s(t,\omega,x) = G(t-s, \vartheta_s(\omega), x)$*, para cualesquiera* $s \leq t$*,* $x \in \mathbb{R}^n$ *y casi todo* $\omega \in \Omega$*.*

3. G *es una hélice respecto el producto oblicuo* $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$*, es decir,*

$$G(t+s,\omega,x) = G(t, \vartheta_s(\omega), \varphi(s,\omega,x)) + G(s,\omega,x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ *,* $s \leq t$ *y casi todo* $\omega \in \Omega$*.*

Demostración. Para la equivalencia de 1. y 2. basta ver que:

$$\begin{aligned} G_s(t,\omega,x) &= \varphi\left(t,\omega,\varphi^{-1}(s,\omega,x)\right) - x \\ &= \varphi(t,\omega,\varphi(-s,\vartheta_s(\omega),x)) - x \\ &= \varphi(t-s,\vartheta_s(\omega),x) - x = G(t-s,\vartheta_s(\omega),x), \end{aligned}$$

si y solo si φ cumple la propiedad de cociclo (Definición 1.2.3). Para la equivalencia de 1. y 3. se observa que:

$$\begin{aligned} &G(t,\vartheta_s(\omega),\varphi(s,\omega,x)) + G(s,\omega,x) \\ &= \varphi(t,\vartheta_s(\omega),\varphi(s,\omega,x)) - \varphi(s,\omega,x) + \varphi(s,\omega,x) - x \\ &= \varphi(t+s,\omega,x) - x, \end{aligned}$$

si y solo si φ cumple la propiedad de cociclo. ■

La demostración del siguiente resultado se encuentra en Arnold [1], Teorema 2.3.35.

Teorema 2.4.3. *Si* φ *es un cociclo en un sistema dinámico filtrado*

$$\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \left\{\mathcal{F}_s^t\right\}_{s\leq t}\right),$$

sobre $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n})$*, entonces* φ *es una* $\mathscr{C}^{k,\delta}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$*-semimartingala cociclo si y solo si el proceso* $\{G(t,\cdot,\cdot x)\}_{t\geq 0}$ *es una* $\mathscr{C}^{k,\delta}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$*-semimartingala hélice respecto a* $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$ *y el proceso* $\{G(-t,\cdot,\cdot)\}_{t\leq 0}$ *es una* $\mathscr{C}^{k,\delta}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$*-semimartingala hélice respecto a* $\left\{\mathcal{F}_{-t}^0\right\}_{t\geq 0}$*. La descomposición canónica*

$$G(s,t,\omega,x) = M^{(s)}(t,\omega,x) + B^{(s)}(t,\omega,x)$$

posee la propiedad de que para cualesquiera $s,t \in \mathbb{R}$*,*

$$M^{(s)}(t,\omega,x) = M(t-s,\vartheta_s(\omega),x), \qquad B^{(s)}(t,\omega,x) = B(t-s,\vartheta_s(\omega),x),$$

donde $G(t,\omega,x) = M(t,\omega,x) + B(t,\omega,x)$ *es la descomposición canónica de* G_0*.*

El siguiente es el resultado principal de este capítulo y establece la forma de obtener una semimartingala cociclo a partir de una semimartingala hélice, vía una EDE [1] del tipo Stratonovich respecto a una hélice. De manera precisa:

Teorema 2.4.4. *Sea* $\left(\Omega, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\mathcal{F}_s^t\}_{s\leq t}\right)$ *un sistema dinámico filtrado. Sea* $F : \mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una* $\mathscr{C}_b^{k,\delta}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$*-semimartingala hélice, donde* $k \in \mathbb{Z}^+$ *y* $\delta \in (0,1]$*. Supóngase que* F *tiene como características locales a la terna* (a_F, b_F, A_F)*, las cuales cumple las condiciones:*

$$a_F \in L_{loc}\left(\widetilde{\mathscr{C}}_b^{k+1,\delta}, dA_F\right) \text{ y } b_F \in L_{loc}\left(\mathscr{C}_b^{k,\delta}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), dA_F\right).$$

Entonces existe un único SDA $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \varphi\right)$ *sobre* $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}\right)$ *de clase* $\mathscr{C}^k$*, tal que para cada* $\epsilon > \delta$*,* φ *es una* $\mathscr{C}^{k,\epsilon}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$*-semimartingala cociclo la cual es solución fuerte de la EDE de Stratonovich*

$$\varphi(t,\omega,x) - x = \begin{cases} \int_{[0,t]} F\left(\circ d^+ s, \varphi(s,x,\omega)\right) & 0\leq t, \\ -\int_{[0,t]} F\left(\circ d^- s, \varphi(s,x,\omega)\right) & t\leq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

La semimartingala cociclo (2.5) *tiene como características locales a* $A_\varphi = A_F$*,*

$$a_\varphi(t,\omega,x,y) = a_F(t,\omega,\varphi(t,\omega,x), \varphi(t,\omega,y))$$

y

$$b_\varphi(t,\omega,x) = b_F(t,\omega,\varphi(t,\omega,x)) + c_F(t,\omega,\varphi(t,\omega,x)),$$

donde

$$c_F(t,\omega,x) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_F^j(t,\omega,x,y)\bigg|_{y=x} \in L_{loc}\left(\mathscr{C}_b^{k,\delta}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), dA_F\right)$$

es el término de corrección de Stratonovich-Itô.

Demostración. 1. Existencia y unicidad. Por las definiciones 2.2.7, 2.3.1 y 2.4.1, el proceso $\mathbf{F}(s,t,\omega,x) := F(t,\omega,x) - F(s,\omega,x)$ es una semimartingala hacia adelante, y hacia atrás cuyas características $(a_s, b_s, A_s) = (a\circ\vartheta_s, b\circ\vartheta_s, A\circ\vartheta_s)$ cumplen las correspondientes condiciones de regularidad para cada $s\in\mathbb{R}$, siempre que para $s = 0$ se cumplan (lo cual se tiene por el supuesto 2.3.2 y la Observación 2.2.12) . De esta forma, existe una $\mathscr{C}^{k,\epsilon}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$-semimartingala de parámetro $x\in\mathbb{R}^n$, $\{\varphi(s,t,\cdot,x) : s,t\in\mathbb{R}\}$, la cual es es un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^k$ y cumple que para todo $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\varphi(s,t,\omega,x) - x = \begin{cases} \int_{[s,t]} F\left(\circ \mathrm{d}^+ u, \omega, \varphi(s,u,\omega,x)\right) & s\leq t, \\ -\int_{[t,s]} F\left(\circ \mathrm{d}^- u, \omega, \varphi(s,u,\omega,x)\right) & t\leq s. \end{cases}$$

[1]El acrónimo EDE representa ecuación diferencial estocástica.

2. Propiedad de flujo. Existe una versión de φ la cual cumple:

$$\varphi(s,s,\omega,\cdot)=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(\cdot)$$

y

$$\varphi(s,t,\omega,x)=\varphi(u,t,\omega,\varphi(s,u,\omega,x)), \tag{2.6}$$

para cualesquiera $x\in E$, $s\leq u\leq t$, y casi todo $\omega\in\Omega$. La demostración de esta afirmación se encuentra en Kunita [9], demostración del teorema 4.5.1.

3. Propiedad de casi cociclo. Se tiene que $\varphi(t,\omega,\cdot):=\varphi(0,t,\omega,\cdot)$ satisface la propiedad de cociclo en el siguiente sentido:

$$\varphi(t+s,\omega,\cdot)=\varphi(t,\vartheta_s(\omega),\varphi(s,\omega,\cdot)),\quad \text{para } t,s\in\mathbb{R}, \tag{2.7}$$

para casi todo $\omega\in\Omega$. De (2.6) se tiene que para demostrar (2.7), es suficiente demostrar

$$\varphi(s,s+t,\omega,\cdot)=\varphi(0,t,\vartheta_s(\omega),\cdot),\ \text{para } t,s\in\mathbb{R}, \tag{2.8}$$

para casi todo $\omega\in\Omega$, ya que si se supone (2.8) y (2.6), entonces

$$\begin{aligned}\varphi(t+s,\omega,\cdot)&=\varphi(0,t+s,\omega,\cdot)\\&=\varphi(s,s+t,\omega,\varphi(0,s,\omega,\cdot))\\&=\varphi(0,t,\vartheta_s(\omega),\varphi(s,\omega,\cdot))\\&=\varphi(t,\vartheta_s(\omega),\varphi(s,\omega,\cdot)).\end{aligned}$$

Ahora se demostrará (2.8). Considérese $t>0$ y $x\in\mathbb{R}^n$; entonces para cualquier $s\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(s,s+t,\omega,x)-x&=\int_{[s,s+t]}F\left(\circ\mathrm{d}^+u,\omega,\varphi(s,u,\omega,x)\right)\\&=\int_{[0,t]}F\left(\circ\mathrm{d}^+u,\vartheta_s(\omega),\varphi(s,s+u,\omega,x)\right),\end{aligned}$$

por la Lema 2.3.4 (i).

Ahora bien, nótese que $\varphi(0,t,\omega,x)$ es la única ecuación de $\mathrm{d}y=F\left(\circ\mathrm{d}^+t,\omega,y\right)$ si y solo si $\varphi(0,t,\vartheta_s(\omega),x)$ es la única solución de $\mathrm{d}y=F\left(\circ\mathrm{d}^+z,\vartheta_s(\omega),y\right)$. De esta forma, para cualquiera $s\in\mathbb{R}$ y $t>0$,

$$\varphi(s,s+t,\omega,x)=\varphi(0,t,\vartheta_s(\omega),x),$$

para casi todo $\omega\in\Omega$. El caso $t\leq 0$ se trabaja de manera análoga, usando la integral hacia atrás de Stratonovich y el Lema 2.3.4 (ii).

4. Características locales: Por la demostración, ver Arnold [1], pg. 85. ■

Sea $\left(\Omega,\mathcal{F}^0,\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}},\{\mathcal{F}_s^t\}_{s\geq t}\right)$ un sistema dinámico filtrado en cual están definido el movimiento Browniano $\{B^j(t,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $j\in\{1,\cdots,m\}$, $m\in\mathbb{Z}^+$ dado por el Teorema 2.2.8.

Sean $f_0 \in \mathscr{C}_b^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{C}_b^{k+1,\delta}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, $k \geq 1$, $\delta > 0$, y sea

$$F\left(t,\omega,x\right) = tf_0\left(x\right) + \sum_{j=1}^{m} f_j\left(\omega\right) B^j\left(t,\omega\right) = M\left(t,\omega,x\right), +B\left(t,\omega,x\right)$$

donde $B\left(t,\omega,x\right) = tf_0\left(x\right)$. F es una $\mathscr{C}_b^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$-semimartingala hélice con características locales

$$\begin{aligned} A\left(t,\omega,x\right) &= t \\ b\left(t,\omega,x\right) &= f_0\left(x\right), \\ a\left(t,\omega,x,y\right) &= \sum_{j=1}^{m} f_j\left(x\right) f_j^*\left(y\right) \end{aligned}$$

El término de corrección de Stratonovich-Itô está dado por

$$c\left(t,\omega,x\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f_j^i\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j\left(x\right),$$

y además $a \in L_{\text{loc}}\left(\widetilde{\mathscr{C}}_b^{k+1,\delta}, \mathrm{d}t\right)$ si y solo $a \in \widetilde{\mathscr{C}}_b^{k+1,\delta}$ (lo cual es cierto ya que $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{C}_b^{k+1,\delta}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$); $b \in L_{\text{loc}}\left(\mathscr{C}_b^{k,\delta}, \mathrm{d}t\right)$ si y solo $b = f_0 \in \mathscr{C}_b^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ (lo cual es cierto por hipótesis), y supóngase que $c \in \mathscr{C}_b^{k,\delta}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$. Por lo tanto, del Teorema 2.4.4 se tiene que la ecuación

$$\mathrm{d}X\left(t,\omega\right) = f_0\left(X\left(t,\omega\right)\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} f_j\left(X\left(t,\omega\right)\right) \circ \mathrm{d}B^j\left(t,\omega\right)$$

genera un único cociclo φ de clase $\mathscr{C}^k$ el cual, para cada $\epsilon \in (0,\delta)$ es una $\mathscr{C}^{k,\epsilon}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$-semimartingala cociclo.

Capítulo 3
Comentarios finales

En el Capítulo 1 se vio que existen diferentes definiciones para el concepto de atractor de un SDA, al tiempo que se determinaron condiciones para su existencia. En este apartado se darán algunos ejemplos para los cuales el flujo generado por una ecuación diferencial estocástica de Stratonovich (el cual, bajo condiciones de regularidad, existe según lo visto en la Sección §2,4), tiene como atractor, en un sentido débil , fuerte y *hacia adelante*, al conjunto $\{0\}$.

En lo que sigue se supondrá que (ϑ, φ) es un SDA generado por la EDE de Stratonovich

$$\mathrm{d}X(t,\omega) = \mu(X(t,\omega))\,\mathrm{d}t + \sigma(X(t,\omega)) \circ \mathrm{d}B(t,\omega) \tag{3.1}$$

sobre el espacio métrico $(E, d_E) = ([0,\infty), |\cdot|)$, donde $|\cdot|$ es la métrica euclidiana en $\mathbb{R}$; $\{B(t,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un movimiento Browniano estándar con valores en $\mathbb{R}$. En este caso se considera la versión canónica del proceso, es decir, $\Omega := \{\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \omega \text{ continua y } \omega(0) = 0\}$ dotado de la sigma álgebra de Borel de la topología de convergencia uniforme sobre compactos. Considérense las siguientes condiciones sobre los coeficientes de difusión:

1. $\mu, \sigma : E \to \mathbb{R}$ tales que $\mu(0) = \sigma(0) = 0$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $x > 0$.
2. $\mu \in \mathscr{C}_b^{1,1}(E, \mathbb{R})$, (en particular μ es localmente Lipschitz continua).
3. $\sigma \in \mathscr{C}^{2,1}(E, \mathbb{R})$, es decir, $\|\sigma\|_{2,1} < \infty$ (en particular, σ tiene derivadas de primero y segundo orden acotadas).

Nótese que con estas hipótesis se tiene que la ecuación (3.1) genera un cociclo $\varphi : \mathbb{R}\times\Omega\times E \to E$, para el cual $\varphi(t,\omega,x)$ es la única solución fuerte de (3.1) con condición inicial no aleatoria $X(0,\omega) = x \in E$.

Se seguirán las definiciones 1.4.1 sobre B-atractor fuerte y 1.4.2 sobre B-atractor débil y se dirá que un conjunto aleatorio compacto $\mathscr{A}$, invariante respecto a φ, es un *B-atractor hacia adelante* para φ si

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,\omega,B), \mathscr{A}(\vartheta_t(\omega))) = 0,$$

para casi todo $\omega \in \Omega$ y para todo $B \subseteq E$ acotado (donde d es la seudométrica de Hausdorff vista en el Capítulo 1). Claramente, estos tres conceptos de atracción coinciden en el caso determinista. En general, ser B-atractor hacia adelante o ser B-atractor fuerte implica ser B-atractor débil. En la siguiente sección se darán condiciones suficientes y necesarias para que $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$, para todo $\omega \in \Omega$, sea un atractor para el flujo generado por la ecuación (3.1), y a partir de estas condiciones, se verá que ninguna otra implicación se tiene entre estos conceptos.

Algunos de los resultados de esta capítulo se encuentran en el artículo de Scheutzow [16].

Condiciones de existencia

En general, la ecuación (3.1) no solo genera un SDA, sino también una difusión (ver [10] para mayor detalle) y por ello es de utilidad el trabajo con las funciones de escala. En este caso, la *función de escala* $p : E \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y la *medida de velocidad* $m(\mathrm{d}s)$ sobre $(0, \infty)$ están definidas por

$$p(x) = \int_1^x \frac{1}{\sigma(s)} \exp\left\{-2\int_1^s \frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}s,$$
$$m(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left\{2\int_1^x \frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}x.$$

La relevancia de la función p es que $\{p[\varphi(t,\cdot,x)]\}_{t\geq 0}$ es una martingala local continua, para cada $x \in E$. Además la finitud de $p(0)$, $p(\infty)$, $m[1,\infty)$ está fuertemente relacionada con el comportamiento de la difusión en la frontera de $E \cup \{\infty\}$. Por las condiciones sobre μ y σ, se tiene que para casi todo $\omega \in \Omega$ la variable aleatoria $S(\omega, x) := \{t \geq -\infty : \varphi(t,\cdot,x) \in \{0,\infty\}\}$ es finita, para todo $x \in E$.

Teorema 3.0.5. *Para cada $x \in E \setminus \{0\}$, el cociclo φ definido arriba cumple con las siguientes propiedades:*

1. *c.s.* $-\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\omega,x) = 0$ *si y solo si* $p(0) > -\infty$ *y* $p(\infty) = \infty$.
2. *Si* $\mathbb{P} - \lim_{t\to\infty} \varphi(t,\omega,x) = 0$, *entonces* $p(\infty) = \infty$ *y, o bien*
   a) $p(0) > -\infty$, *o bien*
   b) $p(0) = -\infty$ *y* $m(0,1] = \infty$.
3. *Si* $p(\infty) = \infty$ *y, o bien*
   a) $p(0) > -\infty$, *o bien*
   b) $p(0) = -\infty$, $m(0,1] = \infty$ *y* $m[1,\infty) < \infty$,

   entonces $\mathbb{P} - \lim_{t\to\infty} \varphi(t,\omega,x) = 0$
4. *c.s.* $-\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\omega,x) = \infty$ *si y solo si* $p(0) = -\infty$ *y* $p(\infty) < \infty$.

La demostración del teorema se encuentra en Scheutzow [16], Proposición 2.1.

Es de interés encontrar una relación entre el teorema anterior y la atracción de conjunto $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$, para todo $\omega \in \Omega$. Para ello se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.0.6. *1. $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$ es un B-atractor hacia adelante de φ si y solo si $p(0) > -\infty$ y $p(\infty) = \infty$.*

2. Si $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$ es un B-atractor débil de φ, entonces $p(\infty) = \infty$ y, o bien

a) *$p(0) > -\infty$, o bien*

b) *$p(0) = -\infty$ y $m(0,1] = \infty$.*

3. Si $p(\infty) = \infty$ y, o bien

a) *$p(0) > -\infty$, o bien*

b) *$p(0) = -\infty$, $m(0,1] = \infty$ y $m[1,\infty) < \infty$,*

entonces $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ es un B-atractor débil de (φ, ϑ).

4. $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ es un B-atractor fuerte si y solo si $m(0,1] = \infty$ y $m(1,\infty) < \infty$.

Demostración. 1., 2. y *3.* $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$ es un B-atractor hacia adelante de φ (respc. B-atractor débil de φ) si y solo si, para todo $B \subseteq E$ acotado

$$\begin{aligned} 0 &= \text{c.s.} - \lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,\omega,B), 0) \\ &= \text{c.s.} - \lim_{t\to\infty} \sup_{y\in B} \varphi(t,\omega,y) \end{aligned}$$

Pero c.s. $- \lim_{t\to\infty} \sup_{y\in B} \varphi(t,\omega,y) = 0$ para todo $B \subseteq E$ acotado si y solo para todo $y \in E$, c.s. $- \lim_{t\to\infty} \varphi(t,\omega,y) = 0$, y el resultado se sigue del teorema anterior, parte *1.* (respc., si los límites anteriores son en probabilidad, entonces se evoca a los incisos *2.* y *3.* del teorema anterior).

4. Obsérvese que $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$ es un B-atractor fuerte si y solo si para todo $B \subseteq E$ acotado se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{c.s.} - \lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,\vartheta_{-t}(\omega),B), 0) \\ &= \text{c.s.} - \lim_{t\to\infty} \sup_{y\in B} \varphi(t,\vartheta_{-t}(\omega),y); \end{aligned}$$

nuevamente, c.s. $- \lim_{t\to\infty} \sup_{y\in B} \varphi(t,\vartheta_{-t}(\omega),y) = 0$ para todo $B \subseteq E$ acotado si y solo para todo $y \in E$, c.s. $- \lim_{t\to\infty} \varphi(t,\vartheta_{-t}(\omega),y) = 0$. Por otra parte, en Kunita [9], pg. 175 se demuestra que si (ϑ,φ) es el SDA generado por (3.1) y se define que $\bar{\vartheta}_t(\omega) = \vartheta_{-t}(\omega)$, $\bar{B}(t,\omega) = B(-t,\omega) = \omega(-t)$ y $\bar{\varphi}(t,\omega,x) = \varphi(-t,\omega,x)$, entonces $\left(\bar{\vartheta},\bar{\varphi}\right)$ es el SDA generado por la ecuación

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{X}(t,\omega) &= -\mu\left(\bar{X}(t,\omega)\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(\bar{X}(t,\omega)\right)\circ \mathrm{d}\bar{B}(t,\omega) \\ \bar{X}(0,\omega) &= x. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De esta forma, por lo mencionado anteriormente se tiene que $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$ es un B-atractor fuerte si y solo si c.s. $-\lim_{t\to\infty} \bar{\varphi}(t,\omega,x) = 0$, lo cual es equivalente a que $\bar{p}(0) = -\infty$ y $\bar{p}(\infty) < \infty$, en virtud del Teorema 3.0.6 (donde $\bar{p}$ es la función de escala asociada a (3.2)). Dado que

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} -\int_{(x,1]} m(\mathrm{d}x) & \text{si } x \in [0,1) \\ \int_{(1,x]} m(\mathrm{d}x) & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

se concluye que $-\infty = \bar{p}(0) = -m(0,1]$ y $\infty > \bar{p}(\infty) = m(1,\infty)$. ■

En los siguientes ejemplos se usará directamente el Teorema 3.0.6 para determinar la naturaleza del atractor $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$. Aunque las condiciones sobre μ y σ en principio no están relacionadas con procesos conocidos, sirven para dar ejemplos de no equivalencia entre los conceptos de atracción. A menos que se diga lo contrario, $\sigma : E \to \mathbb{R}$ está definido por $\sigma(x) = x$, $x \in E$.

1. Supóngase que $\mu : E \to \mathbb{R}$ está dado por $\mu(x) = -x$, entonces

$$m(0,1] = \int_{(0,1]} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{-u}{u^2}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}x = \infty$$
$$m(1,\infty) = \int_{(1,\infty)} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{-u}{u^2}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}x < \infty,$$

es decir, $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ para todo $\omega \in \Omega$, es un B-atractor fuerte y por lo tanto también es B-atractor débil. Por otra parte

$$p(0) = -\int_{[0,1]} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{u}{u^2}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}x > -\infty$$
$$p(\infty) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{u}{u^2}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}x = \infty,$$

lo que implica que $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ para todo $\omega \in \Omega$, es un B-atractor hacia adelante.

2. Considérese ahora $\mu : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ -x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$m(0,1] = \int_{(0,1]} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \infty$$
$$m(1,\infty) = \int_{(1,\infty)} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{-u}{u^2}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}x < \infty,$$

y así, $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ para todo $\omega \in \Omega$, es un B-atractor fuerte y por lo tanto también es B-atractor débil. Puesto que

$$p(0) = -\int_{[0,1]} \frac{1}{x} \exp \mathrm{d}x = -\infty,$$

entonces $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ para todo $\omega \in \Omega$, no es un B-atractor hacia adelante.

3. Sea $\mu : E \to \mathbb{R}$ dado por
$$\mu(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
Entonces
$$m(1,\infty) = \int_{(1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \infty,$$
y así, $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ para todo $\omega \in \Omega$, no es un B-atractor fuerte. Puesto que
$$p(0) = -\int_{[0,1]} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{u}{u^2} \mathrm{d}u\right\} \mathrm{d}x > -\infty$$
$$p(\infty) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \infty,$$
entonces $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ para todo $\omega \in \Omega$, es un B-atractor hacia adelante y por lo tanto un B-atractor débil.

4. Si $\mu : E \to \mathbb{R}$ está dado por $\mu(x) = x$, entonces
$$p(0) = -\int_{[0,1]} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{-u}{u^2} \mathrm{d}u\right\} \mathrm{d}x = -\infty$$
$$p(\infty) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \exp\left\{2\int_1^x \frac{-u}{u^2} \mathrm{d}u\right\} \mathrm{d}x < \infty,$$
de lo que se concluye que $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$ para todo $\omega \in \Omega$, no es un B-atractor débil (y por lo tanto ni es un B-atractor fuerte ni un B-atractor hacia adelante).

En el siguiente ejemplo se mostrará que es posible que $p(0) = -\infty$ y $p(\infty) = m(0,1] = m(1,\infty) = \infty$. En este caso se tiene que $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$, $\omega \in \Omega$, no es ninguna de las tres clases clases de atractores estudiados en este capítulo.

5. Si $\mu \equiv 0$, entonces
$$p(0) = -\int_{[0,1]} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = -\infty$$
$$p(\infty) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \infty$$
$$m(0,1] = \int_{(0,1]} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \infty$$
$$m[1,\infty) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \infty.$$
Explícitamente se tiene que $\varphi(t,\omega,x) = x \exp B(t,\omega)$ y en este caso, para cada $\epsilon > 0$ se cumple que
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \epsilon \exp B(t,\omega) > \epsilon\}) = \frac{1}{2},$$
para todo $t > 0$; por lo tanto $\mathscr{A}(\omega) \equiv \{0\}$, para todo $\omega \in \Omega$, no es un atractor débil.

6. Si $\sigma(x) = \sigma > 0$ y $\mu \equiv -\lambda x$, $x \in E$, $\lambda > 0$, entonces

$$p(0) = -\int_0^1 \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{2\lambda}{\sigma^2}\int_s^1 u\mathrm{d}u\right\} \mathrm{d}s > -\infty$$
$$p(\infty) = \int_1^\infty \frac{1}{\sigma} \exp\left\{\frac{2\lambda}{\sigma^2}\int_1^s u\mathrm{d}u\right\} \mathrm{d}s = \infty$$
$$m(0,1] = \int_{(0,1]} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{\frac{2\lambda}{\sigma^2}\int_x^1 u\mathrm{d}u\right\} \mathrm{d}x < \infty$$
$$m[1,\infty) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\int_1^x u\mathrm{d}u\right\} \mathrm{d}x < \infty,$$

entonces $\mathscr{A}(\omega) \equiv 0$ es un B-atractor hacia adelante, B-atractor débil pero no un B-atractor fuerte. En este caso, la solución explicita a esta ecuación de tipo Langevin es el proceso Ornstein-Ulhenbeck dado por

$$\varphi(t,\omega,x) = e^{-\lambda t}\left(x + \int_{[0,t]} \sigma e^{\lambda s}\mathrm{d}B(s,\omega)\right),$$

donde $x \in E$ es la condición aleatoria de la ecuación de Langevin al tiempo 0.

Apéndice A
Conceptos básicos

En el presente apartado se presentan algunos conceptos y resultados de utilidad en el Capítulo 1.

§1.1 Acerca de topología de convergencia uniforme sobre compactos y topología débil

En esta sección se presentan algunos resultados de utilidad en las secciones §1.3 y §1.4.

Sea X un espacio topológico y $C(X)$ el espacio de las funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$. Se define una "bola" B_f^r, $f \in C(X)$ y $r > 0$ en $C(X)$ como

$$B_f^r := \left\{ g \in C(X) : \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq r \right\}$$

y se verifica que el conjunto de todas las bolas B_f^r forman una base para una topología en $C(X)$. Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X)$ converge en esta topología a un límite $f \in C(X)$ si y solo si f_n converge uniformemente a f, es decir $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Por otra parte, para cada subconjunto compacto $K \subseteq X$ se define la semi-norma $\|\cdot\|_{C(K)}$ en $C(X)$ por $\|f\|_{C(K)} := \sup_{x\in K} |f(x)|$. La topología generada por estas seminormas es llamada la *topología de convergencia uniforme sobre compactos*. En este caso se cumple que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X)$ converge en esta topología a un límite $f \in C(X)$ si y solo si f_n converge uniformemente a f sobre cada compacto.

Ahora, sea E un espacio localmente Hausdorff con base contable; $\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones $f : E \to \mathbb{R}^n$ continuas y dotado con la norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^n},$$

donde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Considere el espacio $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, \mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n))$ de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n)$ tales que $f(0) \equiv 0$, y se denota la semi-norma

$$\|f\|_{\mathscr{C}(K)} := \sup_{x\in K} \|f(x)\|_\infty,$$

para cada compacto $K \subseteq \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{P} := \left\{ \|\cdot\|_{\mathscr{C}(K)} : K \subseteq \mathbb{R},\ K \text{ compacto} \right\}$ y considere una vecindad de la forma

$$V\left(\|\|_{\mathscr{C}(K)}, \frac{1}{n}, g \right) := \left\{ f \in \mathscr{C}_0 \left(\mathbb{R}, \mathscr{C} \left(E, \mathbb{R}^n \right) \right) : \|f - g\|_{\mathscr{C}(K)} < \frac{1}{n} \right\},$$

para $n \in \mathbb{Z}^+$, $K \subseteq \mathbb{R}$ y K compacto, y $g \in \mathscr{C}_0 \left(\mathbb{R}, \mathscr{C} \left(E, \mathbb{R}^n \right) \right)$. Para cada $g \in \mathscr{C}_0 \left(\mathbb{R}, \mathscr{C} \left(E, \mathbb{R}^n \right) \right)$, considere la familia

$$\mathcal{B}_g := \left\{ \bigcap_{i=1}^{j} V\left(\|\cdot\|_{\mathscr{C}(K_i)}, \frac{1}{n_i}, g \right) :, j \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}^+, K_i \subseteq \mathbb{R},\ K_i \text{ compacto} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{B}_g$ es una base de vecindades de $g \in \mathscr{C}_0 \left(\mathbb{R}, \mathscr{C} \left(E, \mathbb{R}^n \right) \right)$, y la familia $\{B_g\}_{g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, \mathscr{C}(E, \mathbb{R}^n))}$ es una base para una topología en $\mathscr{C}_0 \left(\mathbb{R}, \mathscr{C} \left(E, \mathbb{R}^n \right) \right)$. Esta topología es la topología de convergencia uniforme sobre compactos. Sea $\mathcal{F}^0$ la σ-álgebra de Borel en $\mathscr{C}_0 \left(\mathbb{R}, \mathscr{C} \left(E, \mathbb{R}^n \right) \right)$, es decir, la menor σ-álgebra que contiene a los abiertos en la topología de convergencia uniforme sobre compactos (en este caso, los abiertos son uniones de elementos de las familias $\mathcal{B}_g$, para $g \in \mathscr{C}_0 \left(\mathbb{R}, \mathscr{C} \left(E, \mathbb{R}^n \right) \right)$).

A continuación se presentan algunas definiciones básicas sobre espacios de Banach y operadores.

Un *espacio normado* X es un espacio vectorial dotado de un norma. Un *espacio de Banach* es un espacio normado cuya norma es completa. Se cumple que un espacio normado X o bien es un espacio de Banach o bien es un subconjunto denso de un espacio de Banach Y.

Un *operador* T entre dos espacios normados X y Y es una función $T : X \to Y$. Se dice T es un operador en *compacto* si para todo $A \subseteq X$ acotado, $\overline{T(A)}$ es compacto en Y.

Un *operador lineal* $T : X \to Y$ entre dos espacios normados X y Y sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ es una operador que cumple

$$T\left(\alpha_1 x_1 \oplus_X \alpha_2 x_2 \right) = \alpha_1 T\left(x_1 \right) \oplus_Y \alpha_2 T\left(x_2 \right),$$

para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $x_1, x_2 \in X$, donde $\oplus_X$ y $\oplus_Y$ denotan las operaciones se suma vectorial en X y Y, respectivamente.

Se dice que un espacio normado X está *incrustado* en un espacio normado Y, y se escribe $X \hookrightarrow Y$ para denotar la *incrustación* si

(i) X es un subespacio vectorial de Y, y

(ii) el operador identidad I de X en Y es continuo (y como I es lineal, esta propiedad es equivalente a $\|I(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$ para alguna constante $M > 0$).

Se dice que una incrustación $X \hookrightarrow Y$ entre espacios normados es *compacta* si el operador I es compacto.

Como se sabe, si un espacio de Banach X sobre un campo $\mathbb{K}$ es de dimensión finita, entonces su dual, X^* está caracterizado por el conjunto de los operadores lineales y continuos $T : X \to \mathbb{K}$. Sin embargo, en dimensión infinita se puede demostrar que siempre existe un operador lineal del espacio en su campo el cual no es continuo. Por esta razón, es necesario definir, en el caso que X tenga dimensión infinita, al dual de X como $X^* := \{T : X \to \mathbb{K} : T \text{ es funcional continuo}\}$. X^* resulta ser un espacio de Banach (sobre el mismo campo $\mathbb{K}$). A partir de lo anterior, y siguiendo las definiciones que surgen en el análisis funcional sobre topología débil estrella, se enunciarán las siguientes definiciones y teoremas.

Definición A.1.1. Sea X un espacio normado y X^* su dual. La *topología débil estrella en* X^*, denotada por $\sigma(X^*, X)$ es la menor topología que tiene como base local de vecindades de $x_0^* \in X^*$ a los conjuntos de la forma

$$U(x_0^*, x_1, \ldots, x_n; \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x^* \in X^* : |\langle x_0^* - x^*, x_i\rangle| < \epsilon\},$$

donde $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$.

Para los objetivos de este apéndice, se considerarán a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad completo y E un espacio Polaco. Una función $f : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ que cumple las condiciones

1. para todo $x \in E$, la aplicación $\omega \mapsto f(\omega, x)$ es medible respecto a $\mathcal{F}$,
2. para todo $\omega \in \Omega$, la aplicación $x \mapsto f(\omega, x)$ es continua y acotada,
3. la aplicación $\omega \mapsto \sup_{x\in E} |f(\omega, x)|$ es integrable respecto a la medida $\mathbb{P}$,

se dice que es una *función continua aleatoria*. Se identifican dos funciones continuas aleatorias f y g si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f(\omega, x) = f(\omega, x), \text{ para todo } x \in E\}) = 1$, y bajo esta identificación, se define el espacio

$$\mathscr{C}_\Omega(E) := \{f : \Omega \times E \to \mathbb{R} | f \text{ es función continua aleatoria}\}.$$

Este espacio resulta ser un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty := \int_\Omega \sup_{x\in E} |f(\omega, x)| \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Es sabido que el dual del espacio $\mathscr{C}_\Omega(E)$ es el espacio $\mathcal{P}_\Omega(E)$ de las medidas de transición definidas en 1.3.13. Por lo tanto, tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición A.1.2. La *topología débil* sobre $\mathcal{P}_\Omega(E)$ es la menor topología que tiene como base local de vecindades de $\mu \in \mathcal{P}_\Omega(E)$ a los conjuntos de la forma

$$U(\mu, f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{\nu \in \mathcal{P}_\Omega(E) : |(\nu - \mu) f_i| < \epsilon\},$$

donde $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{C}_\Omega(E)$ y $\epsilon > 0$.

§1.2 Medidas invariantes

Teorema A.2.1. *Sea E un espacio Polaco. Una función $\mathscr{C} : \Omega \to 2^E$, con valor en los subconjuntos cerrados no vacíos de E, es un conjunto aleatorio cerrado si y solo si, existe una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de mapeos medibles respecto a $\mathcal{F}$, $c_n : \Omega \to E$, tales que*

$$\mathscr{C}(\omega) = \overline{\{c_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}},$$

para todo $\omega \in \Omega$. En particular, si C es cerrado, existe una selección medible, es decir, una función $c : \Omega \to E$ tal que $c(\omega) \in C(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

La demostración del resultado anterior se encuentra en Crauel [3], Teorema 2.6.

Teorema A.2.2. *Sea $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_\Omega(E)$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{R}}$ converge a μ en la topología débil (para toda función $f \in \mathscr{C}_\Omega(\Omega)$, $\mu^n(f) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(f)$, donde $\mu^n(f) = \int_\Omega \int_E f(\omega, x)\, \mu^n_\omega(\mathrm{d}x)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$).*

2. *$\limsup_n \mu^n(\mathscr{C}) \leq \mu(\mathscr{C})$ para todo conjunto aleatorio cerrado $\{\mathscr{C}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, donde*

$$\mu(\mathscr{C}) := \int_\Omega \mu_\omega(\mathscr{K}(\omega))\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

La demostración del resultado anterior se encuentra en Crauel [3], Teorema 3.17.

Definición A.2.3. Un subconjunto $\Gamma \subseteq \mathcal{P}_\Omega(E)$ se dice que es *tenso*, si para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto compacto (no aleatorio) $C_\epsilon \subseteq E$ tal que $\inf_{\gamma\in\Gamma} \pi_E(\gamma)(C_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$, donde la proyección canónica $\pi_E : \Omega \times E \to E$ está dada por $\pi_E(\omega, x) = x$. De esta forma, para todo $B \in \mathcal{B}(E)$

$$\pi_E\gamma(B) = \gamma\left(\pi_E^{-1}(B)\right) = \gamma(\Omega \times B) = \int_\Omega \gamma(\omega, B)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \mathbb{E}(\gamma(\cdot, B)).$$

El siguiente teorema da una forma de verificar cuando un subconjunto del conjunto de probabilidades de transición es tenso.

Teorema A.2.4. *Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{P}_\Omega(E)$. Considérese las siguientes afirmaciones:*

1. *Para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto aleatorio compacto $\{\mathscr{K}_\epsilon(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ tal que*

$$\inf_{\gamma_\omega\in\Gamma} \gamma_\omega(\mathscr{K}_\epsilon(\omega)) \geq 1 - \epsilon, \text{ para casi todo } \omega \in \Omega.$$

2. *Para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto aleatorio compacto $\{\mathscr{K}_\epsilon(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ tal que*

$$\int_\Omega \gamma_\omega(\mathscr{K}_\epsilon(\omega))\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \geq 1 - \epsilon.$$

3. Γ *es tenso.*

Entonces 1. implica 2., y 2. y 3. son equivalentes.

La demostración del teorema anterior se encuentra en Crauel [3], Proposición 4.3.

Si $\mathcal{E}$ es una σ-álgebra sobre Ω, entonces se dice que $\mathcal{E}$ está casi contenida en $\mathcal{F}$, y se escribe $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ (mod $\mathbb{P}$) si para todo $E \in \mathcal{E}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(\mathcal{E} \triangle \mathcal{F}) = 0$. $\mathcal{P}_{\Omega,\mathcal{E}}(E)$ denotará el subconjunto de $\mathcal{P}_{\Omega}(E)$ de las medidas aleatorias medibles respecto a $\mathcal{E}$.

Teorema A.2.5. *Sea* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ *(mod* $\mathbb{P}$*). Entonces* $\mathcal{P}_{\Omega,\mathcal{E}}(E)$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathcal{P}_{\Omega}(E)$ *bajo la topología débil.*

Una demostración del resultado anterior se encuentra en Crauel [3], Teorema 4.21.

Lema A.2.6. *Supóngase que* $\mathscr{K}$ *es un conjunto aleatorio compacto. Entonces para todo* $\epsilon > 0$ *existe un conjunto compacto no aleatorio* $K_\epsilon \subseteq E$ *tal que* $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \subseteq C_\epsilon\}) \geq 1 - \epsilon$.

Demostración. Sea $\{x_n : k \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso contable de E. Entonces $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{x_k}^{\delta}$ para algún $\delta > 0$, y por lo tanto, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} \bar{B}_{x_k}^{1/m}\right\}\right) = 1,$$

donde se ha usado el hecho que el conjunto

$$\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{x_k}^{1/m}\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \cap \complement\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{x_k}^{1/m}\right) = \emptyset\right\}$$

es un conjunto medible respeto a $\mathcal{F}$. De esta forma, dado $m \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, escójase $n(m,\epsilon)$ de tal forma que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n(m,\epsilon)} \bar{B}_{1/m}^{x_k}\right\}\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2^m},$$

y sea $K_\epsilon = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K(m,\epsilon)$, donde $K(m,\epsilon) := \bigcup_{k=0}^{n(m,\epsilon)} \bar{B}_{1/m}^{x_k}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \nsubseteq C_\epsilon\}) &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \cap \complement(C_\epsilon) \neq \emptyset\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \complement(K(m,\epsilon)) \neq \emptyset\right\}\right) \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathscr{K}(\omega) \nsubseteq K(m,\epsilon)\}) \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon.\end{aligned}$$

Puesto que $K(m,\epsilon)$ es cerrado para cada $m \in \mathbb{N}$, también K_ϵ es cerrado, y por lo tanto, completo. De lo anterior se sigue que para todo $m \in \mathbb{N}$, $K_\epsilon \subseteq K(m,\epsilon)$, es decir, K_ϵ es totalmente acotado, por lo tanto, compacto (ver Teorema 2.14 de Crauel [3]). ■

Lema A.2.7. *Sea $\mathscr{I}$ un conjunto aleatorio invariante respecto a φ. Entonces*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \mathscr{I}(\omega) \subseteq \mathscr{D}(\omega)\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \mathscr{I}(\omega) \subseteq \Omega_{\mathscr{D}}(\omega)\}\right),$$

para todo conjunto aleatorio $\mathscr{D}$.

Demostración. Sea $F := \{\omega \in \Omega : \mathscr{I}(\omega) \subseteq \mathscr{D}(\omega)\}$. Por el teorema de recurrencia de Poincaré, aplicado a la familia discreta $\{\vartheta_{-n} : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\vartheta_{-1}^{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ se tiene que

$$F_\infty = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \vartheta_n F$$

cumple la propiedad $\mathbb{P}(F_\infty) \geq \mathbb{P}(F)$. Para $\omega \in F_\infty$ se sabe que $\mathscr{I}(\vartheta_{-n}(\omega)) \subseteq \mathscr{D}(\vartheta_{-n}(\omega))$ para una infinidad de índices $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, el hecho que $\mathscr{I}$ es un conjunto aleatorio invariante respecto a φ.

$$\mathscr{I}(\omega) = \varphi(n, \vartheta_{-n}(\omega), \mathscr{I}(\vartheta_{-n}(\omega))) \subseteq \varphi(n, \vartheta_{-n}(\omega), \mathscr{D}(\vartheta_{-n}(\omega))),$$

para una infinidad de índices $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\mathscr{I}(\omega) \subseteq \bigcup_{n \geq N} \varphi(n, \vartheta_{-n}(\omega), \mathscr{D}(\vartheta_{-n}(\omega))),$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}(\omega) &\subseteq \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \varphi(n, \vartheta_{-n}(\omega), \mathscr{D}(\vartheta_{-n}(\omega))) \\
&\subseteq \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{\substack{s \geq N \\ s \in \mathbb{R}}} \varphi(s, \vartheta_{-s}(\omega), \mathscr{D}(\vartheta_{-s}(\omega))) \\
&\subseteq \bigcap_{N \geq 1} \overline{\bigcup_{s \geq N} \varphi(s, \vartheta_{-s}(\omega), \mathscr{D}(\vartheta_{-s}(\omega)))} = \Omega_{\mathscr{D}}(\omega).
\end{aligned}$$

Esto significa que $F_\infty \subseteq \{\omega \in \Omega : \mathscr{I}(\omega) \subseteq \Omega_{\mathscr{D}}(\omega)\}$ y así

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \mathscr{I}(\omega) \subseteq \Omega_{\mathscr{D}}(\omega)\}\right) \geq \mathbb{P}(F_\infty) \geq \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \mathscr{I}(\omega) \subseteq \mathscr{D}(\omega)\}\right). \blacksquare$$

Lema A.2.8. *Supóngase que $\varphi : X \to Y$ es una función continua entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y). Sea $C \subseteq X$ un subconjunto compacto. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Para todo $\epsilon > 0$ existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\varphi(C^\gamma) \subseteq (\varphi(C))^\epsilon,$$

o equivalentemente, $\lim_{\delta \to \infty} d_Y\left(\varphi\left(C^\delta\right), \varphi(C)\right) = 0.$

2. Si $B \subseteq Y$ es tal que $B \subseteq \overline{\varphi(C^\delta)}$ para todo $\delta > 0$, entonces $B \subseteq \varphi(C)$.

Demostración. Supóngase lo contrario en 1., es decir, existe $\epsilon > 0$ y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^{1/n}$ tal que

$$d_Y(\varphi(x_n), \varphi(C)) > \epsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por compacidad de C, supóngase que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una sub-sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ la cual converge a algún $x \in C$. Esto implica, por continuidad de la métrica d_Y, que

$$\epsilon \leq \lim_{n\to\infty} d_Y(\varphi(x_n), \varphi(C)) = d_Y(\varphi(x), \varphi(C)) = 0,$$

lo cual es contradictorio.

Para la parte 2., nótese que $B \subseteq \overline{\varphi(C^\delta)}$ implica que $d_Y(B, \varphi(C)) \leq d_Y\left(\overline{\varphi(C^\delta)}, \varphi(C)\right) = d_Y\left(\varphi\left(C^\delta\right), \varphi(C)\right) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ por la parte 1.. Por lo tanto $d_Y(B, \varphi(C)) = 0$, lo cual implica que $B \subseteq \varphi(C)$. ■

Lema A.2.9. *Sea $\varphi : [0,\infty) \times \Omega \times E \to E$ un cociclo y $C \subseteq E$ un conjunto compacto y $b \subseteq E$ un conjunto cerrado. Para cada $\alpha > 0$ el mapeo*

$$t \mapsto \gamma(t) := \sup_{\eta>0} \{\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \varphi(t,\omega,C^\eta) \subseteq B\}) \geq \alpha\}$$

es medible respecto a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Una demostración del resultado anterior se encuentra [14], Lema 4.3.

Teorema A.2.10. *Supóngase que X es una semimartingala respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Sea $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0} \subseteq \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración tal que X es adaptada a $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$, entonces X es una semimartingala respecto a $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$.*

La demostración del resultado anterior está en Protter [13], Teorema 4, pg. 53.

§1.3 Espacios de funciones

1.3.1 Espacios de Sobolev

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$; $\mathscr{C}(D)$ el conjunto de todas las funciones $u : D \to \mathbb{R}$ continuas en D, y $\mathscr{C}^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, el conjunto de todas las funciones $u : D \to \mathbb{R}$ que son k veces diferenciable y la derivada de orden k es continua. La clase de las funciones $u : D \to \mathbb{R}$ que son infinitamente derivables es denotado por $\mathscr{C}^\infty(D)$ y la clase las funciones en $\mathscr{C}^\infty(D)$ que poseen soporte compacto en D (es decir, el soporte de dichas funciones es un subconjunto compacto de D) es denotado por $\mathscr{C}_0^\infty(D)$.

Para $1 \leq p < \infty$, $L^p(D)$ denota el espacio de Banach de las funciones $f : D \to \mathbb{R}$ con la norma

$$\|u\|_{L^p(D)} := \left(\int_D |u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Recuerde que para $p = 2$, $L^2(D)$ es un espacio de Hilbert con producto escalar dado por

$$\langle u, v\rangle_{L^2(D)} := \int_D u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Con frecuencia se usa la siguiente notación para derivadas parciales:

$$\begin{cases} D_i u := \frac{\partial}{\partial x_i} u, & i \in \{1, \cdots, n\} \\ D^\alpha u := \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_1}} u, & \alpha = (\alpha_1, \cdot, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{+n} \text{ y } [\alpha] := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \end{cases}$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in [1, \infty)$, $W^{m,p}(D)$ denota el espacio de las funciones $u \in L^p(D)$ cuyas derivadas de orden $\leq m$ están en $L^p(D)$. Este espacio resulta ser de Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(D)} := \left(\sum_{[\alpha] \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(D)}^p \right)^{1/p}$$

Los espacios $W^{m,p}(D)$ son los llamados *espacios de Sobolev*. Cuando $p = 2$ se escribe $W^{m,2}(D) := H^m(D)$ el cual es de Hilbert con el producto interior

$$\langle u, v\rangle_{H^m(D)} = \sum_{[\alpha] \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(D)}.$$

Si X es un espacio de Banach, $p \in [1, \infty)$ y $-\infty \leq a < b \leq \infty$, entonces $L^p(a, b; X)$ denota el espacio de las funciones $f : (a, b) \to X$ con la norma

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p\, \mathrm{d}t \right)^{1/p},$$

el cual es de Banach.

1.3.2 Propiedades de los espacios de Sobolev

La cerradura de $\mathscr{C}_0^\infty(D)$ en $H^m(D)$ es denotada por $H_0^m(D)$. En particular son de interés los conjuntos $H^1(D) = \{u \in L^2(D) : D_i u \in L^2(D), i \in \{1, \cdots, n\}\}$ y $H_0^1(D)$. $H^1(D)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_{H^1(D)} &:= \langle u, v\rangle_{L^2(D)} + \sum_{i=1}^n \langle D_i u, D_i v\rangle_{L^2(D)}. \\ &= \int_D u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Cuando D es acotado, se tiene la desigualdad de Poincaré: para todo $u \in H_0^1(D)$

$$\|u\|_{L^2(D)} \leq c_0(D) \left(\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2},$$

para alguna constante $c_0(D)$ que depende de D, lo que implica que $H_0^1(D)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(D)} := \sum_{i=1}^{n} \langle D_i u, D_i v\rangle_{L^2(D)},$$

y con la norma

$$\|u\|_{H_0^1(D)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle D_i u, D_i u\rangle_{L^2(D)}\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^2(D)}^2\right)^{1/2} = \left(\int_D \|\nabla u(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{A.1}$$

Se puede demostrar que el valor mínimo que puede tomar el cociente

$$\frac{\|u\|_{H_0^1(D)}}{\|u\|_{L^2(D)}}$$

es el menor de los valores propios (el cual es no negativo) de Δ, dado por el sistema

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u & \text{en } D \\ 0 & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

De esta forma, si λ_1 es dicho valor propio, se tiene que

$$\lambda_1 \|u\|_{L^2(D)} \leq \|u\|_{H_0^1(D)}. \tag{A.2}$$

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de la incrustación de Sobolev, y su demostración se encuentra en el libro *Sobolev Spaces*, de R. Adams, 2003, pg. 86.

Teorema A.3.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $m \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in [1, \infty)$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $W^{m,p}(D) \hookrightarrow L^q(D)$, para $p \leq q < \infty$, siempre que $mp = n$.
2. $W^{m,p}(D) \hookrightarrow L^q(D)$, para $p \leq q \leq p* := np/(n - mp)$ siempre que $mp < n$.

Para finalizar, el siguiente resultado es conocido como el Teorema de Rellich-Kondrachov (la demostración se encuentra en el libro *Sobolev Spaces*, de R. Adams, 2003, pg. 168), en el cual se garantiza que bajo condiciones de regularidad sobre la frontera de D, las incrustaciones del teorema anterior son compactas.

Teorema A.3.2. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto con frontera ∂D regular, $m \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in [1, \infty)$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $W^{m,p}(D) \hookrightarrow L^q(D)$ compactamente, para $1 \leq q < \infty$, siempre que $mp = n$.
2. $W^{m,p}(D) \hookrightarrow L^q(D)$ compactamente, para $1 \leq q \leq p* := np/(n - mp)$ siempre que $mp < n$.

Bibliografía

[1] L. Arnold, *Random dynamical systems*, Springer-Verlag, 1998.

[2] H. Crauel, *Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets*, Ann. di Mat. pura ed Applicata. (1999), no. IV, 52–72.

[3] H. Crauel, *Random probability measures on polish spaces*, Stochastic monographs, vol. 11, Taylor and Francis Routledge, 2002.

[4] J. de Sam Lazaro & P.A. Meyer, *Questions des théorie des flots*, vol. IX, Springer, 1975.

[5] H. Crauel & F. Flandoli, *Attractors for random dynamical systems.*, Probab. Th. Rel. Fields (1994), no. 100, 365–393.

[6] H. Crauel; A. Debussche & F. Flandoli, *Random attractors*, Journal of Dynamics and Differential Equations **9** (1997), no. 2.

[7] Z. Brzeźnia; M. Capiński & F. Flandoli, *Sotochastic Navier-Stokes Equations with Multiplicative Noise*, Stochastic Analysis and Applications (1992), 523–532.

[8] J. Jocod, *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Springer, 1979.

[9] H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[10] K. Itô & H.P. McKean, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer, 1974.

[11] G. Ochs, *Weak random attractors*, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen (1999), no. 449.

[12] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, 3 ed., Text in Applied Mathematics, no. 7, Springer-Verlag, 2001.

[13] P. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Springer, 1990.

[14] H. Crauel; G. Dimitroff & M. Scheutzow, *Criteria for strong and weak random attractors*, arXiv.org (2008).

[15] L. Arnold & M. Scheutzow, *Perfect cocycles through stochastic diffrerential equations*, Probab. Th. Rel. Fields **101** (1995), 65–88.

[16] M. Scheutzow, *Comparison of various concepts of a random attractor: a case study*, Archiv der Mathematik **78** (2002), 233–240.

[17] B. Schmalfuss, *Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations. In: nonlynear dynamics: attractor approximation and global behaviour*, N. Koksch, V. Reitmann and Th. Reidrich eds. (1992), 185–191.

[18] H. Crauel; P. Imkeller & M. Steinkamp, *Bifurcations of one-dimensional stochastic differential equations*, In: Stochastic Dynamics (1999).

[19] R. Temam, *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, 2 ed., Applied Mathematical Sciences, no. 68, Springer-Verlag, 1988.

[20] N. Ikeda & S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, Berlin, 1981.