Primer Entrenamiento Combinatoria

1 abril 2017

El objetivo de este proimer entrenamiento es que los alumnos manejen los conceptos y técnicas básicas de conteo. Las ideas mas simples ya deben haberlas visto en la escuela pero deben llegar a entender claramente la justificación de cada paso. La idea general es que manejen muy bien las siguientes estrategias:

- Enlistar todas las posibilidades (la bruta)
- Divide en casos
- Principio del Producto
- Permutaciones
- Descartar casos simétricos (empezar a introducir combinaciones)

1. Talacha y casos

Deben perderle el miedo a hacer muchos casos, y deben aprender a hacerlo ordenadamente. Será el ultimo recurso en los problemas pero muchos razonamientos surgen de empezar hacer casitos.

Problema 1 ‘?De cuántas formas podemos escribir el número 6 como suma de algunos enteros positivos?

Solución En esta parte del entrenamiento los chicos deben perder el miedo a hacer muchos casos y enlistarlos. La solución más elegante es por casos sobre la cantidad de sumandos y para cada caso en listar todas las posibilidades o bien utilizar separadores.

Problema 2 ‘? Cuántos primos hay entre 50 y 100

Solución Los primos son: 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. NO hay más que enlistar todos y contar.

Problema 3 '?Cuántos triángulos isosceles distintos existen con lados enteros y cuyo perímetro sea menor o igual a 10?

Solución Necesitamos una forma ordenada de contar todos. Una opción es agrupar por el tamaño de los lados iguales.

- Si $t = 1$, entonces el tercer lado sólo puede medir 1, pues un valor mayor no cumpliría la desigualdad del triángulo.
- Si $t = 2$, entonces el tercer lado puede medir 1, 2 ó 3.
- Si $t = 3$, entonces el tercer lado puede medir 1, 2, 3 ó 4, pues hay que cuidar la restricción del perímetro.
- Si $t = 4$, entonces el tercer lado puede medir 1 ó 2.
- Si$t > 4$, entonces no hay triángulos que cumplan lo requerido, pues su perímetro es al menos 11. Teniendo los resultados para cada posible valor de t aplicamos el principio de la suma. **NOTA** También se puede hacer por casos sobre la longitud del lado no-necesariamente igual.

Problema 4 '? Cuántos enteros positivos menos a 1000 cumplen que el producto de sus dígitos es 36?

Solución El problema se divide en casos por la cantidad de diígitos. Conviene tener la factorización en primos y una lista con todos los divisores de 36.

Problema 5 '? Cuántas manos de dominó tienen al menos cinco mulas? Este problema puede servir de introducción o para reforzar la siguiente sección.

Solución Procedemos por casos sobre la cantidad de mulas y luego aplicamos el principio de la suma.

- Si hay 7 mulas. Hay una única mano con las 7 mulas.

- Si hay 6 mulas. Seleccionamos cual de las 7 mulas no se va a usar, esto se puede de 7 formas. Luego seleccionamos una de las 21 fichas restantes.
- Si hay 5 mulas. Seleccionamos cuales 5 de las 7 mulas tendrá la mano (es mas fácil seleccionar la pareja de mulas que no estará). Luego se selecciona la pareja de fichas de las 21 no-mulas que se incluirán en la mano. Esto se hace de
$$\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$$
formas distintas.

2. Principio del Producto

Problema 6 ‘? De cuantas formas podemos hacer una palabra con dos vocales distintas?

Solución Revisar la solción enlistando las 20 palabras. Luego introducir el principio del producto, si es necesario o alguien lo menciona hacer uso del diagrama de árbol.

Problema 7 Un número es *capicua* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ‘? Cuántos números capicúas hay de 7 dígitos. ‘? y de 8 dígitos ?

Solución Un número capicúa de 7 dígitos se escribe como $ABCDCBA$ donde cada letra es un dígito. Las letras B, C, D pueden ser cualquier dígito pero A no puede ser 0. Aplicamos principio del producto y tendremos $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ números que cumplen.

Problema 8 Se tienen 20 programadores. Cada uno programa en Java, Python o C++. Nadie programa en los tres lenguajes y cada quien programa en al menos uno. ‘? De cuántas formas se puede hacer esto?

Solución Para un programador hay 6 opciones de lenguajes de programación que puede saber: *P, J, C, PJ, PC* o *JC*. Así el primer programador tiene 6 opciones, para cada una de estas el segundo programador tiene 6 opciones. Siguiendo este razonamiento hay 6^{20} formas en las que los programadores pueden saber los lenguajes.

3. Permutaciones

Problema 9 ‘? De cuánts formas podemos elejir de entre 10 actores al protagonista, al acompañante y al mano de una película?

Solución Lo primero que podríamos hacer es elegir al protagonista. Esto se puede hacer de 10 formas distintas. Sin embargo, una vez que escogemos al protagonista debemos elegir a alguna de las otras 9 personas como su acompañante. Ya que tomamos a estos dos personajes, todavía hay que elegir al malo de la película, para el cuál quedan únicamente 8 opciones. Como tenemos que elegir al protagonista, y *luego* al acompañante y *luego* al malo, y estas opciones son compatibles, tenemos un total de $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ posibilidades.

Problema 10 ‘? De cuántas formas pueden formarse N personas en la fila para entrar al cine?
Introducir el concepto de $N!$ y dejarlo claro a los alumnos

Problema 11 En una mesa circular se van a sentar N personas. ‘? Cuantos acomodos distintos hay? Dos acomodos se consideran iguales si uno es una rotación del otro.

Solución Una idea es que se abre el arreglo circular en determinada persona, de tal manera que sólo hay que contar cuantas filas se pueden hacer con las $n-1$ personas restantes.
Otra idea es partir la lista en una fila, encontrar $N!$ formas de hacer esa fila y luego este resultado dividirlo entre N para quitar los casos repetidos por las rotaciones.

4. Varios

Problema 12 Algunos de un grupo de cinco niños se forman ruedas para bailar girando. ‘? Cuántas ruedas distintas pueden formar?

Solución Para $k = 1, 2, 3, 4, 5$ hay que primero seleccionar cuales k de los 5 niõs estarán en la rueda, para esto usar combinaciones, y luego multiplicar por $(k-1)!$ que es la cantidad de formas de ordenarlos en circulo. Finalmente sumamos todo.

Problema 13 El Rey Arturo y sus 12 caballeros se van a sentar en la mesa redonda de Camelot, pero Arturo y Leontes no pueden sentarse juntos. ‘? DE cuántas formas pueden acomodarse en la mesa?

Problema 14 ‘? Cuántos números de tres cifras todas distintas son pares. No se permiten ceros a la izquierda.

Solución N Consideremos todos los números pares de tres cifras, incluyendo aquellos que empiezan en cero. Luego a este total le quitamos aquellos números de tres cifras que sean pares y tengan un cero en el dígito de las centenas.

Problema 15 Entre 1 y 1000 ‘?Cuántos múltiplos 13 no son múltiplos de 2 ni de 3.

Problema 15 ‘? Cuántas manos de poker tienen al menos un par?

Problema 17 Los cinco niños de hace rato siguen bailando dando vueltas en ruedas tomados de la mano. Pero ahora los cinco bailan al mismo tiempo. ‘?De cuántas formas pueden entre los cinco formar algunar ruedas?