Primer entrenamiento, Álgebra

25/03/2017

El objetivo de este entrenamiento e asegurarse que los alumnos entienden las nociones básicas de álgebra vistas en la escuela, y aprendan algunas nociones básicas de álgebra de olimpiada. Se revisarán:

- Leyes de exponentes
- Factorización de binomios
- Identidades útiles
- Desigualdades básicas
- Sumas telescópicas
- Progresiones aritméticas y geométricas

Para empezar hay que recordar las leyes de los signos, las de los exponentes, factorización de binommios, recordar suma de Gauss. Es importante notar que es válido restar constantes en ambos lados de las desigualdades y multiplicar por números positivos ambos lados, de aquí ver por que la desigualdad se invierte si multiplicamos por -1. La factorización: $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + ... + b^{n-1})$. Lo más importante de es notar los errores álgebraicos comunes en álgebra que se cometen, y que aprendan a racionalizar, completar productos notables, hacer sumas telescópicas.

Problema 1. Calcular la suma de los primeros n impares:

$$1 + 3 + ... + 2n - 1$$

Solución: utiizar suma de Gauss con para obtener $2(\frac{n(n+1)}{2}) - n = n^2$

Problema 2. Raúl leyó un libro. El primer día leyó 60 páginas y cada día siguiente leyó 7 páginas más que el día anterior. Si la lectura le llevó en total 200 días ¿Cuántas páginas tenía el libro?

Solución. Utilizar suma de Gauss

Problema 3. Sean 1,4,... y 9, 16, ... dos progresiones aritméticas, el conjunto S es la unión de los primeros 2004 términos de cada secuencia, ¿Cuántos números distintos hay en S?.

Solución. Encontrar que 16 es el primer número que aparece en ambas listas, y a partir de ahí aparecen $37, 58...$, de aquí hay que hacer sólo un par de cuentas para llegar al resultado.

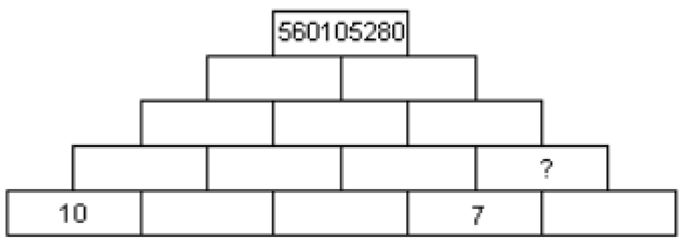
Problema 4. Si m y n son enteros positivos que satisfacen

$$m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = 39$$

entonces, ¿Cuánto vale $n * m$?

Solución $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = m^n(1 + m + m^2) = 39$ de aquí m divide a 39 y n debe ser 1, haciendo casos $m = 3$.

Problema 5. Se escribe en cada casilla de la pirámide un numero mayor que 1 de modo que el número que esta escrito en cada casilla a partir del segundo nivel tiene marcado el número igual al producto de os 2 números escritos en las casillas sobre las que se apoya. ¿Qué número debe ir marcado en la casilla que tiene el signo de interrogación?



Solución. Si nombramos las casillas inferiores desconocidas como x, y, z tenemos que

$$560105280 = 24010x^4y^6z$$
$$23328 = x^4y^6z$$
$$2^5 * 3^6 = x^4y^6z$$

Problema 6. Sean a, b, c, x, y, z números distintos de 0 tales que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. ¿Cuál es el valor de

$$\frac{xyz(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(x+y)(y+z)(z+x)}?$$

Solución. Notar que $\frac{x+y}{a+b} = \frac{x}{a}$ de aquí concluir que la fracción vale 1 es sencillo.

Probema 7. Cada uno de los números $x_1, ..., x_{150}$ es igual a $\sqrt{2} - 1$ o a $\sqrt{2} + 1$. Sea

$$S = x_1x_2 + ... + x_{149}x_{150}$$

¿Se pueden elegir los números $x_1, x_2, ..., x_{150}$ de modo que $S = 121$? ¿Y para $S = 111$?

Solución Observar que tenemos una diferencia de cuadrados o un cuadrado con parte irracional, utilizar paridad y que queremos obtener un racional para determinar si es posible o no.

Problema 8. Calcular el valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ si se sabe que $x + \frac{1}{x} = 9$
Solución Elevar al cuadrado la ecuación para obtener el valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ y con el, multiplicar por $x + \frac{1}{x}$ para obtener el valor buscado.
Problema 9. Encuentra el valor de

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Solución. Racionalizar para notar $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ y hacer la suma telescópica.
Problema 10. Encuentra el valor de

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + ... + \frac{1}{9700}$$

Solución. Observar que los sumandos son de la forma

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3})$$

Problema 11. Encuentra el valor de

$$\sum_{n=1}^{2017} \frac{1}{n^2+3n+2}$$

Solucion. Notar que $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$
Problema 12. Si x,y son enteros tales que $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, encuentra el valor de $3x^2y^2$
Solución. Factorizando se puede legar a que

$$(3x^2+1)(y^2-10) = 517 - 10$$

el resto es hacer casos con los divisores de $507 = 3 * 13^2$.
Problema 13. ¿Pueden 10, 11 y 12 ser 3 de los términos de una progresión geométrica?
Solución. Si escribimos cada término de la sucesión como números de la forma ar^n al hacer el cociente entre ellos se llega a una contradicción.
Problema 14. Si $4 \leq x \leq 9$ y x+y=7, ¿Entre qué rango se encuentra y?
Solución. Tenemos que $y = 7 - x$ de aquí que el mayor valor de y se alcance con $x = 4$ y el menor con $x = 9$ por lo que $-2 \leq y \leq 3$
Problema 15. Sea $x > \frac{14}{13}$ la solución a la desigualdad $bx - (a+b) < 0$ donde a y b son constantes. ¿Cuál es la soución a la desigualdad $ax + 2a + b < 0$?
Solución. tenemos $bx < a + b$ y como la solución es $x > \frac{14}{13}$ tenemos que b es negativo y que $\frac{a+b}{b} = \frac{14}{13}$ de aquí se puede calcular $\frac{a}{b}$ fácilmente y concluirque a es negativo.
Problema 16. Sean a, b dos reales positivos tales que a¿b y $2a^2 + 2b^2 = 5ab$, ¿Cuánto vale $\frac{a+b}{a-b}$
Solución. Notar que $2(a-b)^2 = ab$ y que $2(a+b)^2 = 9ab$.

Problema 17. Si m y n son enteros positivos tales que

$$n^2 < 8m < n^2 + 60(\sqrt(n+1) - \sqrt(n))$$

¿Cuál es el mayor valor posible de n?

Solución. Veamos que e residuo que deja n^2 al dividirlo entre 8 puede ser 1,4 o 0. De aquí es necesario que $60(\sqrt(n+1) - \sqrt(n)) > 4$ luego $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{1}{15}$

$$15 > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

así que $64 > n+1$ por lo que tomamos $n = 54$ pues $7.5^2 = 56.25$ y no podemos tomar 60 entonces si n deja residuo 2 o 6 al dividirlo entre 8, este es el mayor por que para los otros residuos la desigualdad nos pide $8 + \frac{4}{7} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ y $\frac{15}{2} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

Problema 18. Encuentra todos los enteros a y b tales que

$$(a + 3b)(3a + b) = (a + b)^4$$

Problema 19. Sean x,y números reales tales que $x^3 + y^3 = 5$ y $x^2 + y^2 = 3$, ¿Cuánto vale x+y?

Solucion. Si tomamos $x + y = a$ tenemos varias maneras de despejarlo,

$$(x + y)^2 = 3 + 2xy$$

$$xy = \frac{a^2 - 3}{2}$$

$$(x + y)^3 = 5 + 3(\frac{a^2 - 3}{2})(a)$$

$$a^3 = 5 + 3(\frac{a^3 - 3a}{2})$$

$$0 = 10 + a^3 - 9a$$

Notemos que a=2 es una solución. las otras 2 soluciones se consiguen con la fórmula general y hay que ver que los valores finales para x,y que se consiguen con las ecuaciones $x + y = a$ y $x^2 + y^2 = 3$ no resultn complejos.

Problema 20. Encuentra todas las ternas de números naturales a, b, c tales que

$$abc = a + b + c + 1$$

Problema 21. encuentra todos los números de 2 dígitos tales que si tomamos el producto de los díitos del número y le sumamos 50, obtenemos el mismo número inicial.

Para los siguientes problemas hace falta recordar que la suma de números al cuadrado siempre es no negativa.

Problema 22. Muestra que $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ para todo número real x.

Problema 23. Muestra que para todas las ternas de reales a, b, c se cumple $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Problema 24. Si a,b,c son reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ entonces $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$