Desigualdades

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

8 de julio de 2017

1. Para $a, b, c \geq 0$ se cumple: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
2. Para todo x real se cumple $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$
3. Si $a_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$ y $a_1 a_2 ... a_n = 1$ entonces
$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 2^n$$
4. Para a, b, c reales no negativos se cumple
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$
5. Cualesquiera tres reales positivos a, b, c satisfacen:
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a}$$
6. Cualesquiera tres reales positivos a, b y c satisfacen:
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$
7. Para cualesquiera tres eales positivos a, b y c se cumple:
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 bc + b^2 ac + c^2 ab.$$
8. Sean a, b y c reales positivos tales que $a + b + c = 1$ prueba que:
$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$$
9. (Media cuadrática-Media aritmética) Sean x_i reales positivos con $i = 1, 2, ..., n$, pruebe que
$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

10. Sean $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ reales positivos tales que

$$a_1 + ... + a_n = b_1 + ... + b_n$$

Prueba que

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \leq \frac{1}{2}(a_1 + ... + a_n).$$

11. Muestra que si x, y, z son reales positivos entonces se tiene que:

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{z+x}{x+y+z}} \geq 6$$

12. Cualesquiera tres reales positivos a, b y c satisfacen

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

13. Para $a, b, c > 0$ prueba que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

14. Sean a, b y c tres reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2c} \geq 1$$

15. Sean x, y y z reales positivos, demuestra que:

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

16. Sean a y b dos reales positivos, demuestre que:

$$8(a^4 + b^4) \geq (a+b)^4$$

17. Sean a, b y c reales positivos, demuestra que

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

18. Muestra que la sucesión $(1+\frac{1}{n})^n$ es creciente y que la sucesión $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ es decreciente.

19. Para $a, b, c, d > 0$ deuestra que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+acd+abd+bcd}{4}}$$

20. Sean $0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n$ y $0 \leq b_1 \leq ... \leq b_n$.Entonces:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i)$$