Teoría de Números
Primer Entrenamiento

Marzo 2017

El objetivo del entrenamiento es introducir, de manera breve, las herramientas básicas más importantes en teoría de números . Ésta debe ser una oportunidad para que los alumnos se vayan aclimatando a los conceptos y se sientan más cómodos en entrenamientos posteriores. Los temas son:

1. Divisibilidad
2. Números Primos
3. Factorización en Primos
4. Teorema Fundamental de la Aritmética
5. Cantidad de Divisores de un Número
6. Congruencias

Hay que empezar recordando los distintos conjuntos de números (N, Z, Q, R) para saber bien qué es lo que nos pregunta un problema. Hay que saber qué es un múltiplo y qué es un divisor.

Ejercicio 1. ¿Para cuántos naturales n ocurre que $1+2+3+...+n$ divide exactamente a $6n$?

Usar suma de Gauss y llegar a que $n+1|12$.

Ejercicio 2. ¿Cuántos naturales menores a 101 tienen un número impar de divisores positivos?

Observar (probar) que un natural tiene un número impar de divisores positivos si y sólo si es un cuadrado.

Ejercicio 3. El número $25^{64} * 64^{25}$ es el cuadrado de un natural N. ¿Cuánto vale la suma de los dígitos de N?

Agrupar todos los 10's posibles; se debe calcular el número, pero es directo.

Ejercicio 4. ¿Para cuántos naturales n ocurre que $n^2 - 3n + 2$ es un número primo?

Usar que $n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$ y recordar la definición de número primo.

Ejercicio 5. Si el número $7448x24y$ es divisible entre 72, pero $x \neq y$, encuentra $x - y$.

Como 72 = 8 x 9 y 8, 9 son primos relativos, usar de manera separada los criterios de divisibilidad del 8 (últimos tres dígitos divisibles entre 8) y del 9 (suma de dígitos divisible entre 9). Probar, frente al salón, ambos criterios.

Ejercicio 6. Una cadena "cool" es una secuencia de naturales consecutivos cuyos suma de dígitos nunca es múltiplo de 9 (de cada elemento de la cadena). ¿Cuál es la longitud máxima de una cadena "cool"?

Recordar el criterio de divisibilidad del 9; la respuesta es 8, pues por casillas en una lista de 9 naturales consecutivos hay un múltiplo de 9. Dar algún ejemplo de tal lista (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 funciona).

Ejercicio 7. Si $AAA * AAA = AA8001$, donde AAA es un número de tres dígitos iguales, ¿cuál número es AAA?

Viendo los cuadrados de los dígitos, $A = 1$ o $A = 9$. Descartar el que no es.

Ejercicio 8. Encuentra una lista de 5 números primos distintos donde la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos de la lista sea 6. ¿Es única la lista?

Explorando es fácil dar con 5, 11, 17, 23, 29. Observar que alguno de los cinco números debe ser divisible entre 5, porque 6 es congruente con 1 módulo 5 (esto se puede argumentar sin módulos).

Ejercicio 9. Encuentra todos los enteros positivos de dos dígitos tales que éstos son divisibles entre cada uno de sus dígitos.

Si $n = 10a + b$, debemos tener $a|n$, $b|n$, con lo cual $a|b$ y $b|10a$. Tratar los casos posibles.

Ejercicio 10. ¿Para cuántos enteros n ocurre que $\frac{n}{20-n}$ es el cuadrado de un entero?

Si $\frac{n}{20-n} = k^2$, entonces, despejando, tenemos $n = \frac{20k^2}{k^2+1}$. Como $k^2 + 1$ y k^2 son primos relativos, $k^2 + 1|20$ para que la fracción sea entera. Tratar los casos.

Ejercicio 11. ¿Cuántos divisores positivos distintos tiene 30^4 ?

Utilizar este ejercicio para introducir la fórmula general, basada en la factorización prima, de la cantidad de divisores positivos de un natural.

Ejercicio 12. ¿Al final de 2017! cuántos 0's hay? Recordemos que $n! = n * (n-1) * ... * 2 * 1$.

Contar cuántos factores 2 y cuántos factores 5 hay en 2017! (recordar que si

p es primo hay $\Sigma_{k=1}^{\infty}\lfloor n!/p^k \rfloor$ factores p en $n!$; es un argumento de conteo; donde $\lfloor x \rfloor$ denota la función piso – el mayor entero menor o igual a k).

Ejercicio 13. ¿El número $3! * 5! * 7!$ es divisible entre cuántos naturales al cubo?

Proceder de manera muy similar al ejercicio anterior: ver cuántos factores primos distintos tiene $3! * 5! * 7!$.

Ejercicio 14. ¿Cuál es el dígito de las unidades de 2017^{2017} ?

Observar que en aritmética modular se ciclan las potencias.

Ejercicio 15. ¿Por qué $n^3 - n$ siempre es divisible entre 6?

Hacer todos los casos posibles con aritmética modular (o expresando $n = 6k + r$, con $0 \leq r < 5$).

Ejercicio 16. La secuencia 3, 15, 24, 48, ... consiste de todos los múltiplos de 3 que son 1 menos que un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el residuo del término 1994 al dividirse entre 1000?

Observar la secuencia de los residuos módulo 3 que dejan los cuadrados. Ver cuáles elementos sí entran en la lista. Calcular, con aritmética modular, el término pedido.

Ejercicio 17. ¿Cuál es el residuo de $1^{2017} + 2^{2017} + ... + 2016^{2017} + 2017$ al ser dividido entre 2018?

Ver a $2017 - k$ como $-k$ módulo 2017. Usar que, como la potencia a la que se eleva es impar, los signos se respetan y la mayoría de los términos, al ser emparejados (juntar k^{2017} y $(-k)^{2017}$), se anulan.

Los siguientes problemas utilizan todo lo visto anteriormente. En principio son más elaborados y requieren más tiempo.

Ejercicio 18. Una mañana, todos los miembros de la familia de Angela tomaron 8 litros de café con leche. La cantidad de café y la cantidad de leche variaron de taza a taza, pero nunca fue cero. Angela se tomó un cuarto del total de leche y un sexto del total de café. ¿Cuántas personas hay en su familia?

Ejercicio 19. De entre los números 1, 2, ..., 1997, ¿cuál es el máximo número de naturales que podemos poner en un conjunto tal que al elegir cualesquiera dos elementos distintos del conjunto su suma no sea un múltiplo de 7?

Ejercicio 20. En un triángulo equilátero colocamos 6 círculos: uno por cada vértice y uno por cada punto medio de cada arista. En estos 6 círculos se colocarán los números del 10 al 15 de tal manera que la suma de los números en cada lado del triángulo sea S (la misma suma para los tres lados). ¿Cuál es el máximo valor para S?

Ejercicio 21. ¿Cuál es el dígito de las decenas de $7! + 8! + 9! + ... + 2017!$?

Ejercicio 22. Dado un número natural n, sea $P(n)$ el producto de todos los divisores positivos de n. Por ejemplo, $P(12) = 1 * 2 * 3 * 4 * 6 * 12 = 1278$.

Encuentra todos los valores de n, menores que 400, tales que n tiene sólo dos divisores primos distintos y $P(n) = n^6$.

Ejercicio 23. Sean x, y dos naturales de dos dígitos tales que y se obtiene al revertir el orden de los dígitos de x. Los enteros x, y deben satisfacer $x^2 - y^2 = m^2$ para algún natural m. ¿Cuánto vale $x + y + m$?

Ejercicio 24. Para cada $n > 1$ definimos $P(n)$ como el mayor factor primo de n. ¿Para cuántos naturales n ocurre que $P(n) = \sqrt{n}$ y $P(n+48) = \sqrt{n+48}$