Tarea Álgebra

Pablo Meré Hidalgo
pablo.mere@cimat.mx

agosto de 2018

Problema 1. Hay n automoviles idénticos en un circuito circular. Entre todos tienen justo el combustible suficiente para que sólo un auto complete una vuelta al circuito. Demuestra que hay un auto que puede completar una vuelta tomando combustible de los demás.

Problema 2. Sea $n \geq 1$. Se tiene un tablero de $2^n \times 2^n$ y se ha colocado una ficha de 1×1. Desmuestra que el resto del tablero puede cubrirse con triminos L.

Problema 3. Demuestra por inducción que

$$f(n) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n$$

Problema 4. Sea α un número real tal que $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{Z}$. Demuestra que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\alpha^n + 1/\alpha^n \in \mathbb{Z}$.

Problema 5. Resuelve la ecuación para x.

$$(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 = x$$

Problema 6. La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (con a, b, c distintos de cero) tiene soluciones reales. Demuestra que a, b y c no pueden ser términos consecutivos de una sucesión geométrica.

Problema 7. Muestra que si las ecuaciones $x^2 + px + q = 0$ y $x^2 + px - q = 0$ ambas tienen como soluciones números enteros entonces existen enteros a y b tales que $a^2 + b^2 = p^2$. Determina q en términos de a y b.

Problema 8. Utilizando que $x^2 \geq 0$, demuestra la desigualdad entre media cuadrática y media aritmética: Dados a y b números reales positivos

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$$

Nota: Ten cuidado en el orden de las implicaciones que uses en tu demostración.

y también la desigualdad entre media aritmetica y media geométrica: Dados a y b números reales positivos

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Problema 9. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números positivos con producto 1, demuestra que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 2^n$$

Problema 10. Considera la suceción $x_0, x_1, x_2, \ldots$ donde $x_0 = a \in (0, 1/4)$ y $x_{n+1} = x_n^2 + a$. Depuestra que es una sucesión creciente pero acotada (es decir, existe M tal que $x_i < M$ para toda i).