

# Tarea: Congruencias con números primos

Myriam Hernández Ketchul

5 de mayo de 2018

- Problema 1.** Encuentra todos los primos  $p$  para los cuales el cociente  $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$  es un cuadrado perfecto.
- Problema 2.** Si  $n \in \mathbb{N}$ , encuentra el menor valor de  $n > 1$  tal que  $2009^n = \dots 2009$  (Un número que termina en 2009).
- Problema 3.** Demuestra que si  $q$  es un factor primo de  $a^2 + b^2$  y  $q \equiv 3 \pmod{4}$  entonces  $q \mid a$  y  $q \mid b$ .
- Problema 4.** Encuentra el menor entero positivo  $x$  tal que  $13 \mid (x^2 + 1)$ .
- Problema 5.** Demuestra que  $n^7 - n$  es divisible por 42, para cualquier entero  $n$ .
- Problema 6.** Demuestra que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 504 si el de en medio es un cubo.
- Problema 7.** Prueba que  $(p - 1)! \equiv p - 1 \pmod{1 + 2 + 3 + \dots + (p - 1)}$  si  $p$  es primo.
- Problema 8.** Sea  $p$  un número primo. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos  $n$  tales que  $p$  divide a  $2^n - n$ .
- Problema 9.** *Teorema de Wilson.* Si  $p$  es primo, entonces  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$
- Problema 10.** Sea  $p$  un primo. Demuestra que  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  tiene soluciones enteras si y sólo si  $p = 2$  o  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .