

# Tarea de Teoría de Números

17 de julio de 2018

**Indicaciones:** Escribe la solución a los siguientes problemas de forma clara y concisa. En caso de no haber resuelto el problema, escribe tu solución parcial. Escanea o tómale foto a tus soluciones y envíalas al correo electrónico myriam.hernandez@cimat.mx a más tardar el martes 24 de Julio con asunto TareaTN-Tu nombre, por ejemplo "TareaTN-Juanito Pérez".

Recomiendo fuertemente intentar todos los problemas. Si necesitas sugerencia a algún problema me puedes escribir después de haberlo intentado por un buen rato, con tus ideas y conjeturas, se estarán respondiendo dudas hasta el jueves a media noche.

1. De entre los enteros del 1 al 12, inclusive, se eligen 4 números, ¿cuál es el máximo valor posible de su mínimo común múltiplo?
2. En el número de 8049 dígitos  $\overline{3030 \cdots 3030x0505 \cdots 0505}$ ,  $x$  es un dígito, antes de  $x$  aparece 2012 veces el dígito 3 y después de  $x$  aparece 2012 veces el dígito 5. Si el número es divisible entre 37, ¿Cuánto vale  $x$ ?
3. Sea  $N$  el menor número de 2012 dígitos tal que el número  $3N$  tiene todos sus dígitos pares, ¿Cuántos dígitos 3 tiene  $N$ ?
4. Usando sólo números primos, es posible formar conjuntos con las siguientes dos condiciones:
  - a) Cualquier número primo de un dígito puede estar en el conjunto.
  - b) Para que un número primo con más de un dígito esté en el conjunto, deben estar en él tanto el número que resulta de quitarle sólo el primer dígito como el que resulta al quitarle sólo el último dígito.¿Cuál es la mayor cantidad de números que tiene el conjunto?
5. Encuentra el mayor divisor de 1001001001 tal que no exceda 10'000.
6. Encuentra  $n$  tal que  $2^n \mid 3^{1024} - 1$ .
7. Considera un entero positivo  $M$  que cumple la siguiente propiedad: si escogemos al azar un número  $x$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, 1000\}$ , la probabilidad de que  $x$  sea un divisor de  $M$  es igual a  $\frac{1}{100}$ . Si  $M \leq 1000$ , ¿cuál es el mayor valor posible de  $M$ ?
8. Los números de 7 dígitos 74A52B1 y 326AB4C son ambos múltiplos de 3. ¿Cuáles son los posibles valores de  $C$ ?
9. Sea  $n$  un entero positivo. Demuestra que  $3^{2^n} + 1$  es divisible entre 2, pero no entre 4.
10. Hallar todas las parejas  $(p, q)$  de números primos tales que  $2p^2q + 45pq^2$  es un cuadrado perfecto.