Tarea 2 de Geometría

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato 2018

Fecha de entrega: Sábado 21 de Abril

Instrucciones: Entregar por escrito la solución a todos los problemas incluso si no está completa la solución escribe tus avances. Es importante hacer la tarea ya que esta será considerada para futuros selectivos.

1. Sea ABC un triángulo y L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente. Muestra que $\measuredangle LAC = \measuredangle MBA$ si y solo si $\measuredangle CNA = \measuredangle ALB$.

2. En el triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB y BC mide 5. ¿Cuánto miden AB y CA?

3. Sea ABC un triángulo isósceles con $CA = AB$. Sean X, Y, Z los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA, AB respectivamente. Si CZ corta al incirculo en L y YL corta a BC en M, muestre que $XM = MC$.

4. En el triángulo ABC se tiene que $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 80^o$. Sea P un punto en el segmento AB tal que $\measuredangle BPC = 30^o$. Demuestra que $AP = BC$.

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Una circunferencia Γ_1 que pasa A y D intersecta de nuevo a AB en E. Una circunferencia Γ_2 que pasa C y D intersecta de nuevo a BC en F. Sea G el segundo punto de intersección de Γ_1 y Γ_2. Demuestra que F, G y E son colineales.

6. Sea ABC un triángulo con ángulo en A de 60^o. Sean BM y CN, las bisectrices internas de los ángulos en B y C. Muestra que $BC = BN + CM$.

7. El triángulo acutángulo ABC está inscrito en un circulo con centro O. Sean D la intersección de la bisectriz del $\measuredangle BAC$ con el segmento BC y P la intersección de AB con la perpendicular a OA que pasa por D. Muestra que $AC = AP$.

8. Sea ABC un triángulo acutángulo, M y N puntos sobre los lados AB y CA respectivamente. Las circunferencias de diámetros BN y CM se intersectan en P y Q. Muestra que los puntos P, Q y el ortocentro H de ABC son colineales.

9. En el triángulo acutángulo ABC, BH es la altura desde el vértice B. Los puntos D y E son puntos medios de AB y AC respectivamente. Supongamos que F es el simétrico de H con respecto a ED. Demostrar que la recta BF pasa por el circuncentro del triángulo ABC.

10. Sea ABC un triángulo, M el punto medio de BC, L y N las intersecciones de AM con el incírculo del triángulo. Muestra que si $CA = AB + AM$ entonces el ángulo $\measuredangle LIN = 120^o$ donde I es el incentro de ABC.