Primer entrenamiento Algebra

Pablo Meré Hidalgo
pablo.mere@cimat.mx

Resumen

El álgebra es una herramienta poderosa para resolver problemas en matemáticas. En este primer entrenamiento de álgebra veremos los soguientes temas

- Definición y propiedades de los números
- Desigualdades básicas
- Factorizaciones útiles y producton notables
- Progresiones aritméticas y geométricas

El tiempo de los entrenamientos resulta insuficiente para adquirir los conocimientos y habilidades necesarias para la olimpiada. Te recomendamos que estudies por tu cuenta, y con ayuda de tu profesor. Si tienes dudas con los problemas puedes contactarnos por correo.

1. Numeros y conjuntos de números

Nombre	simbolo	ejemplos	Operaciones
Naturales	$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots, 2018, \ldots\}$	admite $+$ y $\times$
Enteros	$\mathbb{Z}$	$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	admite $+$,$-$ y $\times$
Racionales	$\mathbb{Q}$	$\left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$	Admite $+$, $-$, $\times$, $\div$
Reales	$\mathbb{R}$	$\pi, \sqrt{2}, e, 24/55, -97, \ldots$	Admite $+$, $-$, $\times$, $\div$.

Los **números racionales** son todos aquellos que se pueden expresar como cociente de dos enteros. Cuando se escriben en representación decimal eventualmente tienen decimales periódicos.
En los reales existen números que no cumplen lo anterior, y se llaman **irracionales**.

El Cero. 0 es un número especial porque para cualquier número a cumple

$$a \cdot 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad a + 0 = a.$$

Además es el único número que cumple lo anterior.

¿Dividir entre cero? Notese que no existe un número a con $a \cdot 0 = 1$, es decir, cero no tiene inverso multiplicativo, y **nunca se puede dividir entre cero**.

Teorema 1 (Ley del producto cero) *Cuando tenemos un producto que da como resultado cero, necesariamente aluno de los factores es cero es decir*

$$a \cdot b = 0 \textit{ implica } a = 0 \textit{ ó } b = 0$$

2. Desigualdades básicas.

Teorema 2 (Propiedad. Orden de los números reales) *Si tenemos un número real (racional o entero) a, se cumple sólo una de las siguientes:* *i)* $a > 0$, *ii)* $a < 0$, *iii)* $a > 0$

Teorema 3 (Propiedades de desigualdades) *Sean x, y números reales. (a) si $x > 0$, $y > 0$ entonces $xy > 0$ (b) si $x > 0$, $y > 0$ entonces $x + y > 0$*

Ejercicio Usando las propuedades anteriores convencete de las siguientes afirmaciones. Da un ejemplo para cada una.

1. si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $ab < 0$.
2. si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $ab > 0$.
3. si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
4. si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
5. si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.
6. si $a < 0$ entonces $a^{-1} < 0$.

3. Factorizaciones

Muchos problemas de álgebra se resuelven usando la factorización correcta. Aquií estan algunas. ¿sabes como se llaman?

- $ab + ac = a(b + c)$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3$
- $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$

4. Sucesiones Geométricas y Aritméticas

Definición 1 (Progresión aritmética) *Una progresión aritmética es una sucesión de números*

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

tales que $a_{n+1} - a_n = d$ para todo n natural, con d constante.
*d se llama **diferencia** de la sucesión. Se puede mostrar facilmente que el término general de la suceción es*

$$a_n = a_0 + nd, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplos Estas son algunas progresiones aritméticas

- $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$
- $1, 101, 201, 301, 401, 501 \ldots$
- $5, 3, 2, -1, -3, -5, -7, -9, \ldots$
- $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

Definición 2 (Progresión Geométrica) *Una progresión geométrica es una sucesión de números*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

*distintos de cero, tales que $a_{n+1}/a_n = d$ para todo r natural, con r constante. A r se le llama **razón** de la sucesión. El término general de la sucesión es*

$$a_n = a_0 r^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplos Estas son algunas sucesiones geométricas

- $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$
- $6, 3, 3/2, 3/4, 3/8, 3/16, 3/32 \ldots$
- $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
- $5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$

5. Problemas

Estos son los problemas para el entrenamiento. Vienen separados por sección, intentamos que estuvieran en orden de dificultad.

5.1. Desigualdades

Problema 1.1 Si $4 \leq x \leq 9$ y x+y=7, ¿Entre qué rango se encuentra y?

Problema 1.2 Si el intervalo $x > \frac{14}{13}$ es la solución de la deigualdad $bx - (a+b) < 0$ donde a y b son constantes reales, ¿Cuál es la solución de la desiguadad $ax + 2a + b < 0$?

Problema 1.3 Ecuentra todos las ternas de enteros a, b, c tales que

$$abc = a + b + c + 1$$

Problema 1.4 Encuentra el intervalo donde la función $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ es positiva.

Problema 1.5 Sea n un entero positivo. Demuestra que la parte fraccionaria de $\sqrt{(}4n^2 + n)$ siempre es menor a $1/4$.

Problema* 1.6 Si a, b, c son números reales, tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ entonces $-1/2 \leq ab + bc + ca \leq 1$

5.2. Sucesiones aritmeticas y geometricas

Problema 2.1 Determina todas las ternas de números naturales (a, b, c) tales que a, b y c están en progresión geométrica y cumplen con la propiedad $a + b + c = 111$.

Problema* 2.2 ¿Pueden 10, 11 y 12 ser 3 de los términos de una progresión geométrica?

Problema 2.3 Encuentra la suma de los primeros n enteros positivos en el caso general y para $n = 63$.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$$

Esta suma en forma cerrada se conoce como **suma de Gauss**.

Problema 2.4 Calcula la suma de los primeros n impares positivos y calcula el resputado cuando $n = 45$.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

Problema 2.5 Raúl leyó un libro. El primer día leyó 60 páginas y cada día leyó 7 páginas más que el día anterior. Si la lectura le llevó un total de 200 días ¿Cuántas páginas tenía el libro?

Problema 2.6 Sean $1, 4, 7, \ldots$ y $9, 16, 23, \ldots$ dos progresiones aritméticas. S el el conjunto formado por la unión de los primeros 2004 términos de cada secuencia. ¿Cuántos num. distintos hay en S?

Problema* 2.7 Encuentra todos los triángulos rectángulos tales que sus lados están en progresión aritmética.

problema* 2.8 Prueba que si una progresión aritmética de enteros contiene un cuadrado perfecto, entonces contiene una infinidad de cuadrados perfectos.

5.3. Factorizaciones y producton notables

Problema 3.1 Si x es un número real tal que satisface la ecuación

$$2^{2^x} + 4^{2^x} = 42$$

Determina el valor de $\sqrt{(2^{2^{2^x}})}$. Nota $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Problema 3.2 Encuentra todos los números enteros x y tales que a) $xy = x + y$. b) $xy = p(x + y)$ con p un primo.

Problema 3.3 Determina todos los triángulos rectángulos de lados enteros tales que su área es igual a su perímetro.

Problema 3.4 Encuentra todos los valores de x tales que sean solución de la siguiente ecuación

$$8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$$

Problema 3.5 Si m y n son enteros positivos que satisfacen $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = 39$, calcula $m \cdot n$.

Problema 3.6 Calcula el valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ sabiendo que $x + \frac{1}{x} = 9$

Problema 3.7 Sean a, b, c, x, y, z números reales distintos de 0 tales que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Calcula el valor de

$$\frac{xyz(a + b)(b + c)(c + a)}{abc(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Problema 3.8 Sean a y b reales positivos tales que $a > b$ y $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. ¿Cuánto vale $\frac{a+b}{a-b}$?