Entrenamiento de Geometría

Olimpiada de Matemáticas en Guanajuato

Israel Bonal Rodríguez

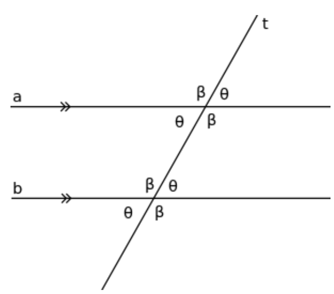
Sábado 18 de Mayo de 2019

Temas del entrenamiento:

1. Ángulos entre paralelas.
2. Suma de los ángulos de un triángulo.
3. Teorema de Pitágoras.
4. Triángulos congruentes.
5. Triángulos semejantes.

Ejercicio 1. Dos triángulos equiláteros iguales con perímetro 21 se traslapan de manera que sus lados quedan paralelos (uno esta derecho y otro de cabeza, forman una estrella). ¿Cuál es el perímetro del hexágono que queda formado dentro de la figura?

En la siguiente figura se cumplen las siguientes igualdades:



Ejercicio 2. En el triángulo ABC, se cumple que $\angle BAC + \angle ABC = 110°$. D es un punto sobre el segmento AB tal que $CD = CB$ y $\angle DCA = 10°$. ¿Cuánto mide $\angle BAC$?

Proposición: La suma de los ángulos en un triángulo es 180°.

Ejercicio 3. Sea $PQRS$ un paralelogramo con $\angle PQR = 41°$, T es un punto en el segmento SR tal que $\angle TPS = 83°$, ¿cuánto vale $\angle PTR$?

Proposición: Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Proposición: La suma de dos ángulos internos de un triángulo es igual al ángulo externo del otro vértice.

Ejercicio 4. Dibujamos una circunferencia X con centro B, sea A un punto en X, dibujamos una circunferencia Y (más chica que la anterior) con centro en A, Y intersecta a X en Q y R, y Y intersecta al segmento AB en S. P es el punto diametralmente opuesto a Q en Y (Q, A y P son colineales). Si $\angle AQB = 70°$, ¿cuánto mide $\angle ASP$?

Ejercicio 5. Sea $ABCDE$ un pentágono regular, con los vértices en ese orden y en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle CAD$?

Proposición: La suma de los ángulos internos de un n-ágono es $180°(n-2)$.

Proposición: Los ángulos internos de un n-ágono regular miden $\frac{180°(n-2)}{n}$

Ejercicio 6. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $AB = 5, BC = 17, CD = 5, DA = 9$ y la diagonal BD es un número entero. ¿Cuánto mide BD?

Proposición (Desigualdad del triángulo): En un triángulo ABC se cumple que $AB < AC + BC$.

Ejercicio 7. Un círculo de radio 1 está inscrito en un cuadrado y este cuadrado a su vez está inscrito en otro círculo. Encuentra el área del círculo mayor.

Proposición (Teorema de Pitágoras): En un triángulo rectángulo ABC donde AB y BC son sus catetos y AC su hipotenusa se cumple que:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Ejercicio 8. Un triangulo ABC cumple que el lado AB mide 3, el lado BC mide 5 y el lado CA mide el promedio de los otros dos lados. ¿Cuánto mide $\angle BAC$?

Proposición (Converso del Teorema de Pitágoras): Dado un triángulo ABC que cumple:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

entonces $\angle ABC = 90°$ es decir es un triángulo rectángulo.

Ejercicio 9. Sea $ABCD$ un cuadrado y P un punto sobre su diagonal AC tal que $\angle ABP = 30°$. BP intersecta a AD en el punto Q. ¿Cuánto mide $\angle QPD$?

Definición (Congruencia de triángulos): Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.

Proposición (Criterios de congruencia):

1. (Criterio LAL) Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
2. (Criterio ALA) Si un lado y sus dos ángulos adyacentes en un triángulo son congruentes, respectivamente, a un lado y sus ángulos adyacentes en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
3. (Criterio LLL) Si tres lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, a tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Ejercicio 10. Sea ABC un triángulo cualquiera. Construimos externamente los triángulos equiláteros ABE y ACF. Muestra que los segmentos EC y BF miden lo mismo.

Rectas notables del triángulo: Dado un triángulo ABC tenemos las siguientes rectas importantes:

1. **Mediana:** Es una recta que pasa por un vértice de ABC y por el punto medio del lado opuesto.
2. **Bisectriz:** Es una recta que divide a un ángulo interno de ABC en dos ángulos iguales.
3. **Mediatriz:** Es una recta que pasa por el punto medio de un lado de ABC y es perpendicular a este lado.

4. **Altura:** Es una recta que pasa por un vértice de ABC y es perpendicular a su lado opuesto.

Ejercicio 11. Sea ABC un triángulo isósceles con $BA = AC$. Trazamos la altura desde A que corta a BC en H. Muestra que AH también es mediana, mediatriz y bisectriz.

Ejercicio 12. En un cuadrilátero $ABCD$, con ángulos interiores menores a 180°, los lados AB, BC y CD son iguales. También sabemos que $AD = AC = BD$. Encuentra la medida de $\angle ABC$.

Ejercicio 13. ¿Cuánto mide la altura de un triangulo equilátero de lado 2?

Ejercicio 14. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se intersectan en su punto medio.

Ejercicio 15. Sobre el cuadrado $ABCD$ se construye un triángulo equilátero ABE internamente y un triángulo equilátero BCF externamente. Demuestre que los puntos D, E y F son colineales.

Definición (Semejanza de triángulos): Los triangulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si sus ángulos respectivos son iguales, es decir:

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$

$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Proposición (Criterios de semejanza):

1. (Criterio AA) Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

2. (Criterio LAL) Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo y las longitudes de los lados que lo forman son respectivamente proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.

3. (Criterio LLL) Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Ejercicio 16. Sea D el pie de la altura de un triángulo rectángulo ABC sobre su hipotenusa BC. Si $BD = 3$ y $CD = 5$, ¿cuánto vale AD?

Ejercicio 17. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, H es el pie de altura correspondiente al vértice A. Utilizando semejanza de triángulos, demuestra que $AH^2 = BH \cdot HC$

Ejercicio 18. Sea ABC un triángulo cualquiera, y sean BN y CM medianas del mismo. Demuestra que MN y BC son paralelas. Si $MN = 5$, ¿cuánto vale BC?

Ejercicio 19. Sea $ABCD$ un rectángulo con $AB = 16$ y $BC = 12$. Sea E un punto sobre la perpendicular a AC por C tal que $EC = 15$ y tal que AE intersecta a DC en F. ¿cuál es el área del triángulo ACF?

Ejercicio 20. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, sea M el punto medio de la hipotenusa BC, muestra que $MB = MA = MC$ (M es el circuncentro de $\triangle ABC$).