Principio de inducción y sumas telescópicas

1. Inducción

En este entrenamiento trabajaremos con una forma de demostración común a todas las áreas de la matemática olímpica: la inducción, que se basa en el principio de inducción matemática, que de forma simple, dice: "dado un número entero a que tiene la propiedad P, y el hecho de que si un número n con la propiedad P implique que $n+1$ también la tiene, entonces todos los números enteros a partir de a la tiene".

El razonamiento inductivo se puede describir informalmente como un efecto dominó, donde ocurre una reacción en cadena con una secuencia de piezas de dominó cayendo una detrás de la otra. Para entenderlo mejor de manera más formal, observemos su uso en un ejemplo básico:

Ejemplo 1. Para cada entero positivo n, se cumple que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Demostración. Procedamos por inducción. Nuestro caso base es $n=1$. La igualdad a verificar es $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, la cual es claramente cierta. Ahora supongamos que para cierto entero positivo n, se satisface $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. y veamos que $1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Sumando $n+1$ a la ecuación $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, se obtiene $1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)(\frac{n}{2}+1)=(n+1)(\frac{n}{2}+\frac{2}{2})=(n+1)\frac{n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, que es exactamente lo que queríamos mostrar. Se concluye que para cada entero positivo n, se cumple que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Problemas de Inducción

La intención de estos problemas es que se familiarizen con el razonamiento inductivo. Por lo tanto, serán a ser resueltos mediante el uso del mismo.

1. Muestra que, para cada entero positivo n, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.
2. Muestra que, para cada entero positivo n, $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Muestra que, para cada entero positivo n, el número $n(n+1)$ es impar.
4. Muestra que $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{n})=n+1$ para cada entero positivo n.
5. Muestra que $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
6. Muestra que $2^n\geq n+1$ para cada entero positivo n.
7. ¿Para qué enteros positivos n se cumple que $1\cdot 2\cdots 3\cdots n>2^n$?

3. Sumas telescópicas

Una herramienta secundaria para el cálculo de expresiones de forma más simple y bonita es la suma telescópica, en donde se cancelan términos para llegar a una epxresión con menos términos. Una suma telescópica tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$$

Así, la suma original, que al parecer tenía $2n$ términos, se simplificó a una suma de únicamente 2 términos. Veamos dos ejemplos, para ilustrar esta situación con mayor claridad:

Ejemplo 2. Para cada entero positivo n, se cumple que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Demostración. Analicemos cada uno de los términos. Observemos que $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, y en general $(2k - 1) = k^2 - (k - 1)^2$. Luego, la suma $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ puede ser vista como $(1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \cdots + (n^2 - (n - 1)^2)$. Todos los términos se cancelan, excepto dos, y nos queda $-0^2 + n^2 = n^2$. Por lo tanto, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, como queríamos ver.

Ejemplo 3. Para cada entero positivo n, se cumple que $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Demostración. Analicemos cada uno de los términos. Observemos que $\frac{1}{1\cdot2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, y en general $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k+1}{k\cdot(k+1)} - \frac{k}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Luego, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$. Todos los términos se cancelan, excepto dos, y nos queda $\frac{1}{1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}$. Se sigue que $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, que es lo que queríamos

4. Problemas de sumas telescópicas

Como en el apartado de inducción, la intención es que los siguientes problemas sean ahora resueltos con sumas telescópicas

1. Utiliza la misma suma telescópica que en el problema de ejemplo para mostrar que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Sea $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ para cada entero positivo n. Muestra que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$

3. Muestra que $\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{4^2-1} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2-1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$ para cada entero positivo n.

4. ¿Cuál es el valor de $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$?

5. Muestra que $(r - 1)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = r^{n+1} - 1$ para cada número r y entero positivo n.

5. Sugerencias

Inducción

1. $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

2. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)] = (n+1)[\frac{2n^2+n}{6} + \frac{6n+6}{6}] = (n+1)[\frac{2n^2+7n+6}{2}] = (n+1)[\frac{(n+2)(2n+3)}{2}]$

3. $(n+1)(n+2) - n(n+1) = 2(n+1)$.

4. $(n+1)(1 + \frac{1}{n+1}) = (n+1)\frac{n+2}{n+1}$

5. $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n(n+2))}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}$

6. $2 > \frac{n+2}{n+1}$

7. Observa que para $n = 4$ se cumple y $n > 2$.

Telescópicas

1. $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

2. Sea $S = 1 + 2 + \cdots + n$ y observa que $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = 2S - n$

3. $\frac{1}{(2k)^2-1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$

4. $1 = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

5. Considera la suma $(r-1) + (r^2 - r) + \cdots + (r^{n+1} - r^n)$

6. Fuentes

1. Teoría inducción: https://es.wikipedia.org/wiki/Inducci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

2. Problemas inducción: http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/9320/FASCICULO%20DE%20INDUCCION%20MATEMATICA.pdf?sequence=1

3. Sumas telescópica: https://brilliant.org/wiki/telescoping-series/