Principios básicos en combinatoria
sedes 11 y 12 de mayo

Alfredo Arturo Elías Miranda
alfredo.elias@cimat.mx

11, 12 de mayo de 2019

Estas son las notas de combinatoria para los entrenamientos en sedes. Cualquier error o mejora que tengan pueden sugerirla y escribirme a mi correo. Además si quieren que les pase la solución de algún problema que ya intentaron un buen rato y no les sale me pueden escribir para pedirme la solución. También se vale que me escriban pidiendome más problemas de combinatoria.

1 Primera parte

En combinatoria usualmente se busca contar cosas y para poder hacer, se usan dos herramientas principales. Estás herramientas se van a explicar en este entrenamiento y después van a ser usadas para deducir otras herramientas más avanzadas.

Estos dos principios fundamentales son: ***Principio de la suma y del producto.*** Estos dos conceptos siempre serán usados y serán elementales para construir y entender herramientas más avanzadas de combinatoria. No duden en preguntar cualquier pregunta sobre principio del producto y de la suma.

1.1 Principio de la suma

Definamos el principio de la suma informalmente de la siguiente manera: ***Si tenemos que un objeto se puede seleccionar de m formas posibles y otro objeto se puede seleccionar de n formas posibles, entonces se puede elegir un objeto cualquiera de m+n formas.*** Esta es una definición informal de lo que es el principio de la suma, uno de los conceptos más usados en combinatoria.

Observación Notesé que usan la palabra ”o”, por eso deben de sumar las posibles maneras que tienen para elegir cada uno de los objetos.

Ejemplo 1.1 Juán quiere comer pizza, hamburguesas **o** helado. Cerca de su casa hay 5 restaurantes de pizza, 2 de hamburguesas y 8 de helado. ¿De cuántas maneras puede comer Juán, si solo tiene suficiente hambre para comer en un solo restaurante?

Solución: Dado que Juán solo quiere elegin un restaurante de todas las posibles opciones. Es decir que debe elegir si comer,pizza **o** hamburgesa **o** helado. Así que debemos usar principio de la suma y obtenemos que las posibilidades para comer de Juan son,

$$5 + 2 + 8 = 15$$

Por lo tanto Juán tiene 15 formas posibles de ir a comer.

Ejemplo 1.2 En una fiesta se tienen 5 sabores de pastel y 3 de gelatina. ¿De cuántas formas se puede elegir una rebanada de gelatina o pastel?

Solución Notemos que por principio de la suma, las maneras de elegir una rebanada de gelatina **o** pastel son:

$$5 + 3 = 8$$

Por lo tanto se concluye que se puede elegir una rebanada de pastel o gelatina de 8 maneras distintas.

Problema 1.1 Laura tiene 20 cambios distintos de ropa y 10 de su hermana que puede usar. ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir Laura?

Problema 1.2 En una heladería hay 15 helados a base de leche y 10 a base de agua, ¿de cuántas manestas se puede elegir un helado?

Problema 1.3 En una escuela hay 3 grupos, el primero tiene 10 niños y 7 niñas, el segundo tiene 8 niños y 10 niñas y el tercero tiene 5 niños y 13 niñas. ¿De cuántas maneras se puede elegir a una niña o un niño de los tres grupos?

1.2 Principio del producto

Definamos el principio del producto de la siguiente manera: ***Si se desean elegir dos objetos, tales que uno se puede elegir de m maneras y el otro se puede elegir de n maneras, entonces los dos objetos se pueden elegir de mn maneras.*** Este es el segundo concepto que se usa mucho en combinatoria. Normamente su usa en conjunto con el principio de la suma.

Observación Nótese que se usa la palabra ”y”, a diferencia que en el principio de la suma se usaba ”o”. Por lo que puede ser de ayuda ver que si se usa la palabra ”y”, se deben de multiplicar las posibilidades y si se usa la palabra ”o”, se deben de sumar. Esto puede ayudar a identificar con mayor facilidad cunado se debe usar el principio de la suma y cuando el principio del producto.

Ejemplo 2.1 Juán quiere comer pizza, hamburguesas **y** helado. Cerca de su casa hay 5 restaurantes de pizza, 2 de hamburguesas y 8 de helado. ¿De cuántas maneras puede comer Juán?

Solución Dado a que se quiere elegir un restaurante de pizza, uno de hamburguesas **y** uno de helado, asñi que debemos usar el principio del producto y obtenemos que las posibilidades son:

$$5 * 2 * 8 = 80$$

Por lo tanto Juán tiene 80 posibilidades para ir a comer pizza, hamburguesas **y** helado.

Ejemplo 2.2 En una fiesta se tiene 5 sabores de pastel **y** 3 de gelatina. ¿De cuántas formas se puede elegir una rebanada de gelatina o pastel?

Solución Notemos que por el principio del producto, las posibles maneras de elegir una rebanada de gelatina **y** una de pastel son:

$$5 * 3 = 15$$

Por lo tanto se concluye que se puede elegir una rebanada de pastel **y** una de gelatina de 15 formas distintas.

Problema 2.1 Se tienen 6 sabores de helados. Alfredo quiere comprar helado con dos bolas. ¿Cuántas posobles combinaciones puede hacer? ¿Y si quiere un helado de 3 bolas?

Problema 2.2 Karina tiene 4 blusas, 3 faldas y 2 pantalones. ¿Cuántas combinaciones distintas puede hacer para vestirse?

Problema 2.3 Las ciudades de Nápoles, Venecia, Roma y Florencia están unidas entre ellas. A cada dos de ellas las unen 7 caminos diferentes. ¿De cu”antas formas se puede ir de Venecia a Flornecia sin pasar dos veces por la misma ciudad?

1.3 Problemas

Problema 3.1 ¿De cuántas formsa puedo elegir 7 números del 1 al 9 de manera que al sumarlos el resultado sea múltiplo de 3?

Problema 3.2 Ale tiene 15 blusas, 10 faldas, 9 pares de zapatps y 8 pares de botas. Cada artículo es diferente a los demás. Se viste con una blusa, una flada y un par de alguno de los dos tipos de calzado. ¿De cuántas formas se puede vestir?

Problema 3.3 En un entrenameinto de tiro con arco, Franklin debía incrustar una flecha en 8 frutas diferentes. Si falló 3 de sus tiros, ¿De cuántas formas pudieron haber quedado las frutas? (Una posible forma es: a las frutas 1, 4, 5, 7 y 8 les incrustó una flecha y a las frutas 2, 3 y 6 no les incrustó una flecha)

Problema 3.4 ¿Cuántos números de 8 cifras tienen 4 cifras pares y 4 cifras impares? ¿Cuántos con 6 cifras pares y dos impares?

Problema 3.5 Una tribu antigua tenía un lenguaje con 20 letras: 6 vocales y 14 consonantes. En todas sus palabras se alternaban vocales y consonantes, de una por una. ¿Cuántas palabras de 9 letras podían formar en esta tribu?

Problema 3.6 ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 números del 1 al 1000 de tal forma que su suma sea múltiplo de 3?

Problema 3.7 Pablo quiere pintar las 5 paredes de su habitación. Ha comprado 12 colores diferentes de pintura. ¿De cuántas formas puede pintar su habitación?¿Y si no quiere que 2 paredes juntas tengan el mismo color?¿Y si no quiere 2 paredes del mismo color?

Problema 3.8 ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8? ¿Cuál es la suma de estos números?

2 Segunda parte

Una vez que se han visto el principio de la suma y el principio del producto, se pueden comenzar a ver otro tipo de herramientas para contar cosas. Dos herramientas muy útiles en la olimpiada son las ***combinaciones y permutaciones.*** Estas dos herramientas se usan para contar muchas cosas en la olimpiada, en diferentes problemas.
Eventualmente se notará que las combinaciones y permutaciones no son más que el principio del producto aplicado de cierta manera, por eso es importante que les queden bien claros los conceptos básicos vistos anteriormente.

2.1 Conteo

Primero comencemos definiendo varios concepts y formas de contar antes de pasar a aprender las combinaciones y permutaciones.
Estos conceptos básicos se introducirán de la siguiente manera:

Ejemplo 1.1 Se tienen 5 personas y se quieren sentar en 5 sillas numeradas del 1 al 5. ¿De cuántas formas se pueden sentar las 5 personas en las sillas?

Solución: La primer persona tiene 5 opciones para sentarse, la segunda tiene 4, la tercera tiene 3, la cuarta tiene 2 y la quinta tiene 1 opción para sentarse. Así que por principio del producto se tiene que se pueden sentar de:

$$\underline{5} * \underline{4} * \underline{3} * \underline{2} * \underline{1} = 120 = 5!$$

Por lo tanto se pueden sentar de 120 formas.

Definición 1.1: Se define el factorial de un número natural de la siguiente manera:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$$

Ejemplo 1.2: Si se tienen 5 sillas y 5 personas, ¿De cuántas maneras se pueden sentar las personas?(Nota, las sillas se consideran como iguales y no importa como estén acomodadas)

Solución Esto se puede hacer de una sola manera, dado a que no importa el orden de como se eligan las parsonas para sentarse. Solo importa que se van a sentar 5 personas en 5 sillas. Lo cual solo se puede hacer de una manera.

Observación 1.1: Notemos que el resultado es afectado si importa el orden al momento de contar o si el orden no importa.

Se debe de tener bien claro el principio del producto para poder continuar con las permutaiones y las combinaciones. Recomiendo resolver los siguientes problemas antes de seguir con combinaciones y permutaciones. Si se complican estos problemas, recomiendo repasar nuevamente el principio del producto y luegor seguir con combinaciones y permutaciones.

Problema 1.1: Cuantos números de 1000 dígitos hay. Use un argumento de combinatoria para justificar el número encontrado.

Problema 1.2: Se quieren elegir una mesadirectiva, que se forma con un presidente, un vicepresidente, un tesorero y un secretario. La mesa directiva se quiere elegir de un grupo de 30 niños. ¿Cuántas mesas directivas distintas se pueden formar?

Problema 1.3: Se quiere hacer una bandera de tres colores diferentes. La bandera se forma con tres pedazos de tela y un asta. Se tiene 5 tipos de asta y 20 colores de tela. ¿Cuántas banderas diferentes se pueden formar?

2.2 Permutaciones

Las permutaciones son usadas para contar cosas en las que nos importa el orden. Es decir que AB no es lo musmo que BA.

Observación 2.1: Notese que todas las permutaciones posibles de las letras de la palabre ABC son:

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

Ejemplo 2.1: ¿De cuántas formas se puede permutar las letras de la palabra ABCDE?

Solución: Notemos que la primer letra tiene 5 posibilidades, la segunda 4, la tercera 3, la cuarta 2 y la quinta 1. Así que la palabra se puede permutar de:

$$\underline{5} * \underline{4} * \underline{3} * \underline{2} * \underline{1} = 5!$$

formas posibles.

Definición 2.1: Dados n elementos diferentes, decimos que estos se pueden permutar de n! maneras.

Ya se tienen las permutaciones de n elementos elegidos de un conjunto de n elementos. Ahora hay que ver que pasa cuando tenemos n elementos y queremos permutar k elementos, con $0 \leq k \leq n$. Para esto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2: ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras de la palabra ABCDEF?

Solución: Notemos que la primer letra de la palabra de cuatro letras se puede elegir de 6 maneras, la segunda de 5, la tercera de 4 y la cuarta de 3. Por lo tanto se pueden formar:

$$\underline{6} * \underline{5} * \underline{4} * \underline{3} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

maneras de formar una palabra de 4 letras de la palabre ABCDEF.

Definición 2.2: Sean m y n dos naturales, con n mayor que m. Denotamos las permutaciones de m en n de la siguiente manes:

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Esto nos da las maneras de permutar m elementos de un conjunto de n elementos. Tal como se hizo en el **Ejemplo 2.2**. Esto se conoce como las **permutaciones de n en m**.

Problema 2.1 ¿Cuántas palabras diferentes se pueden obtener permutando las letras de la palabra ZXCVBNMA?

Problema 2.2 Se tiene un grupo, donde hay 10 niños y 15 niñas. ¿De cuántas formas distinras se puede elegir dos niñas y dos niños, para que tengan una tarea en específico? (**Nota:** las tareas asignadas son diferentes)

Problema 2.3 ¿Cuántos números distintos se pueden formar con los dígitos 0, 2, 3, 5, 9? (Nota: No se pueden repetor dígitos y necesariamente se deben de usar todos los dígitos)

2.3 Combinaciones

Las combinaciones son otra herramienta muy usada en combinatoria. Estas se usan cuando se quiere elegir cierta cantidad de elementos de un conjunto sin importar el orden en que se haga. Solo importan los elementos seleccionados.

Ejemplo 3.1: ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 letras de la palabra ABCDEFG?

Solución Por lo antes visto de permutaciones, se sabe que se pueden permutar tres letras de:

$$P_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

Esto nos da las permutaciones de tres letras, pero tenemos selecciones repetidas, por ejemplo las letras CDE se cuentan en los siguientes casos:

$$CDE, CED, DCE, DEC, ECD, EDC$$

Las tres letras CDE se cuentan tres veces y solo nos interesa contarlas una vez, porque no nos interesa la permutacin de las letras, solo nos importa cuales letras elegimos. Para elminar estas repeticiones, hay que notar que tres letras se puede pemutas de:

$$P_3^3 = \frac{3!}{0!} = 3! = 6$$

Por lo tanto para contar solo una vez las tres letras seleccionadas hay que dividir 210 entre 6. De esto se concluye que la selección de tres letras de 7 se puede hacer de 35 formas.

El resultado obtenido anteriormente ya son combinaciones, que son muy parecidas a las permutaciones, pero donde no importa el orden de seleccion de los objetos seleccionados.

Definición 3.1: Sean m y n dos números enteros positivos, n mayor que m. Se definen las combinaciones de n en m como las formas de elegir m objetos de una colección de n obetos. En esta selección de m objetos **no importa el orden** en el que se eligan los objetos. Esto se denota y se obtiene de la siguiente manera:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo 3.2 ¿De cuántas formas se pueden elegir 6 alumnos para ir a la olimpiada nacional si se tiene un grupo de 30 aspirantes?

Solución Se quiere elegir un grupo de 6 personas para asistir a la olimpiada nacional. En este problema no importa el orden en que se seleccionen los alumnos, solo importa quienes van a la olimpiada nacional. Así que por la definición 3.1, esta seleccion se puede hacer de la siguiente manera:

$$\binom{30}{6} = \frac{30!}{6!(30-6)!} = \frac{30 * 29 * 28 * 27 * 26 * 25}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}$$

Por lo tanto se tiene que este grupo se puede elegir de $\frac{30*29*28*27*26*25}{6*5*4*3*2*1}$ maneras diferentes.

Problema 3.1 ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 letras de la palabra aaabbbsssddd?

Problema 3.2 ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar borrando al menos una de las letras de la palabra ANTENA? Por ejemplo, algúnas palabras que se obtienen así son A, TNA, ANTNA.

Problema 3.3 Un equipo de baloncesto consta de 11 jugadores. Pero solo 5 pueden estar al mismo tiempo dentro de la cancha. Uno de los jugadores se llama Franklin. ¿De cuántas formas se pueden elegir a los 5 jugadores que estarán jugando, si Frankiln simepre debe estar en la cancha?

2.4 Problemas

Problema 4.1 ¿Cuántos números de 6 dígitos tiene un dígito par? ¿Cuántos tinen dos dígitos pares?

Problema 4.2 ¿Cuántos números de 8 cifras tienen 4 cifras pares y 4 cifras impares? (De una solución a la ya antes planteada)

Problema 4.3 En la lotería se escoge una combinación de 6 números. Cada uno de ellos se elige enter 1,2,3,..,64, sin poderse repetir. Ale cree que el dígito 3 es de mala suerte, así que decide comprar un boleto en el que no aparezca. ¿Cuántas opciones de boletos tiene Ale?

Problema 4.4 Se quieren acomodar 50 personas en una mesa redonda. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto, si se considera que las rotaciones de un acomodo son iguales?

Problema 4.5 Juan tiene 15 libros y Ale tiene 19. ¿De cuántas formas pueden intercambiar 5 libros?

Problema* 4.6 Hay tres equipos cada uno de ellos con tres personas. Se quieren sentar alrededor de una mesa redonda con sillas numeradas del 1 al 9. ¿De cuántas formas se pueden sentar las 9 personas en las sillas, de tal manera que cualesquiera dos personas consecuticas del mismo equipo estén separadas entre sí por la misma cantidad de sillas? (XI ONMAS, P3)

Porblema* 4.7 Se dice que un número es Paceño si al escribir sus dígitos en orden inverso se obtiene un número mator que él. Por ejemplo, el 3426 es Paceñp porque 6243 es mayor que 3426, mientras que 774 no es Paceño porque 477 no es mayor que 774. ¿Cuántos números de cinco dígitos son Paceños? (XII ONMAS, p3)

3 Problemas de todo

Problema 3.1: ¿Cuántos números de seis dígitos hay tales que todos sus dígitos sean pares?

Problema 3.2: El alfabeto hermitiano consiste únicamente de tres letras: A, B y C. Una palabra en este lenguaje es una secuencia arbitraria de no más de cuatro letras. ¿Cuántas palabras diferentes existen en este lenguaje?

Problema 3.3: ¿Cuántas maneras distintas hay de colocar un rey blanco y uno negro en un tablero de ajedrez de modo que no se ataquen entre sí?

Problema 3.4: ¿Cuántas palabras con o sin sentido podemos formar con las letras de la palabra "Matemáticas"?

Problema 3.5: ¿Cuántos números de 6 dígitos tienen al menos un dígito par?

Problema 3.6: ¿Cuántas diagonales hay en un n-ágono?

Problema 3.7: ¿De cuántas formas se pueden dividir 14 personas en 7 parejas?

Problema 3.8: ¿Cuántas maneras hay de dividir a un grupo de 10 personas en dos equipos de basquetbol de 5 personas cada uno?

Problema 3.9: Diez puntos están marcados en el plano de tal manera que no hay tres colineales (es decir, no hay tres de ellos que están sobre la misma línea recta). ¿Cuántos triángulos hay con vértices en estos puntos?

Problema 3.10: ¿De cuántas maneras se pueden reacomodar las letras de la palabra "HUMANOS" de tal manera que tanto las vocales como las consonantes estén en orden alfabético entre sí? Ejemplo: HAOMNUS (A-O-U, H-M-N-S).

Problema 3.11: ¿Cuántas maneras hay de colocar 12 damas blancas y 12 damas negras en los cuadros negros de un tablero de ajedrez?

Problema 3.12: ¿Cuántos números de seis cifras tienen 3 dígitos pares y 3 impares?

Problema 3.13: Una persona tiene 6 amigos. Cada noche, durante 5 días, invita a cenar a un grupo de 3 de ellos de modo que el mismo grupo no es invitado dos veces. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?

Problema 3.14: Se tiene un conjunto de 15 palabras distintas. ¿De cuántas maneras se puede elegir un subconjunto de no más de 5 palabras?

Problema 3.15: Para participar en cierta lotería en Rusia, uno debe elegir 6 números de entre 45 impresos en una tarjeta (todas las tarjetas son idénticas).

(a) ¿Cuántas maneras de elegir los 6 números hay?

(b) Después de realizado el sorteo, los organizadores de la lotería decidieron contar el número de maneras que hay de elegir los 6 números de tal manera que exactamente 3 de los 6 números elegidos estén entre los números de la combinación ganadora. Ayúdalos a encontrar la respuesta.