

Miscelaneo de álgebra.

Pablo Meré Hidalgo

29-07-2020

1. Muestra que las siguientes igualdades se cumplen

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x - y)^2 + 2xy \\x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\x^2 + y^2 &= \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} \\x^2 + xy + y^2 &= \frac{(x + y)^2 + x^2 + y^2}{2}\end{aligned}$$

Sugerencia: Desarrolla las expresiones y comprueba que son ciertas

2. Pablo fue al rancho y en la feria ganadera compró animales para la granja de su tío Sam. Una gallina cuesta 1 dólar, un cerdo cuesta 5 dólares y un pollito cuesta 5 centavos. El tío Sam le encargó que comprara al menos un cerdo, una gallina y un pollito. Si Pablo compró exactamente 100 animales y gastó exactamente 100 dólares ¿Cuántos compró de cada uno?

Sugerencia: Introduce variables para la cantidad de animales de cada tipo. Resuelve las ecuaciones explorando casos o usando técnicas de álgebra y divisibilidad

3. En la siguiente expresión cada letra es un dígito distinto. Encuentra el resultado de la suma.

$$SEND + MORE = MONEY$$

Sugerencia: Vas a trabajar muchos casos. Considera cosas como los acarreos en las sumas, algunas desigualdades sencillas. Es un buen reto para una comida familiar o el profe de la escuela

4. Imagina que tienes un reloj de manecillas usual, el minutero y el horario se mueven de manera continua a velocidades constantes. ¿ a qué hora entre las 3 y las 4 se encuentran las manecillas una encima de la otra? ¿ a qué horas, entre las 3 y las 4, forman un ángulo de 90° ? Enlista todos las horas (instantes exactos) en las que las manecillas se posicionan una encima de la otra, en el transcurso del día.

Sugerencia: plantea el problema como una ecuación usando como variable el tiempo (o la distancia de la manecilla) que recorre desde la última hora exacta hasta que se encuentran una encima de la otra

5. Se tiene la siguiente lista de números enteros 5, 3, 6, 4, 7, 5, 8, 6, 9, 7, ... y continua el patrón indefinidamente. Encuentra el 1997-ésimo número en la lista. ¿En qué posición aparece el 2020 ?

Sugerencia: Encuentra una regularidad en la sucesión, son dos sucesiones entrelazadas. ¿Puedes poner una descripción general del número en la posición n ?

6. Encuentra todas las parejas de reales x, y tales que $[x] + \{y\} = [y] + \{x\}$

NOTA: $[k]$ se llama parte entera o "piso", de k ; es el máximo entero positivo que es menor o igual a k . $\{k\}$ es $k - [k]$ y se llama la parte fraccionaria de k .

Sugerencia; Mueve las partes enteras del mismo lado y las partes fraccionarias del otro lado de la ecuación. Observa que la diferencia entre las partes racionales es menor a una unidad. ¿Cómo deben ser los enteros si están a distancia menor a una unidad?

7. (P4, OMM 2017) Un subconjunto B de $1, 2, \dots, 2017$ se dice que tiene la propiedad T si cualesquiera 3 elementos de B son los lados de un triángulo no degenerado. Encuentra el máximo número de elemento que un conjunto con la propiedad T puede tener.

NOTA: La desigualdad del triángulo nos indica que en un triángulo de lados a, c, b se cumple que $a + b > c$

Sugerencia: Para números a, b, c en el conjunto puedes suponer sin pérdida de generalidad que $a < b < c$. Hay tres posibles desigualdades del triángulo con a, b, c (dependiendo de como los acomodes) la que sirve más es $a + b > c$. ¿qué te dice esto sobre los dos números mas pequeños del conjunto? También puedes cambiar la desigualdad a $a > c - b$ ¿Esto como afecta al menor de todos los números del conjunto? La respuesta es $\{1009, 1010, 1011, \dots, 2016, 2017\}$

8. (Spivak, cap 1, prob 15) Demostrar que si X y Y son reales y no son ambos cero, entonces

$$x^2 + xy + y^2 > 0$$

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0$$

Sugerencia; utiliza la factorización de n -ésimas potencias.
 $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

9. Si X es un número real tal que satisface la ecuación

$$2^{2^x} + 4^{2^x} = 42$$

Encuentra el valor de $\sqrt{(2^{2^{2^x}})}$. **NOTA:** $a^{b^c} = a^{(b^c)}$

10. Encuentra todos los valores de x que sean solución de la siguiente ecuación

$$8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$$

Sugerencia: Introduce una nueva variable $z = 2^{2^x}$ ¿Cómo se traduce el problema? ¿Qué condiciones extras cumple z por como se definió?

11. Sean a y b números reales positivos tales que $a > b$ y cumplen $a^2 + b^2 = 5ab$. Encuentra el valor de

$$\frac{a+b}{a-b}$$

sugerencia: $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

12. Si $x + \frac{1}{x} = 9$, calcula el valor de

$$x^3 + \frac{1}{x^3}$$

Sugerencia: eleva al cubo ese 9 y ve que queda

Puedes contactarme para ver soluciones o platicar conmigo en mi correo pablo.mere@cimat.mx o bien en Twitter-Instagram-Telegram como @pmere_mx o a mi facebook: Pablo Meré Hidalgo

Algunos lugares donde puedes encontrar material para practicar son los siguientes. Recuerda intentar problemas acorde a tu nivel y experiencia en entrenamientos.

1. <http://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/nivel-estatal/>
2. <http://www.ommenlinea.org/actividades/concursos/canguro-matematico/>
3. <http://www.ommenlinea.org/publicaciones/revista-tzaloa-2/revista-en-linea/>
4. https://ommgto.cimat.mx/es/Materiales_OMMGto
5. <https://onmapsguanajuato.wordpress.com/material/>
6. <http://www.matetam.com/problemas>

No olvides seguir nuestros canales de comunicación

1. <https://ommgto.cimat.mx>
2. <https://www.youtube.com/channel/UCI9t2kVEILUUFHj4Rs1myyA>
3. <https://www.facebook.com/ommgto>
4. <https://twitter.com/ommgto>

Recomendaciones generales

1. practica mucho por tu cuenta. Las olimpiadas de matematicas son como un deporte de alto rendimiento, entre mas practicas mejor te haces.
2. Es importante intentar problemas por tu cuenta, pero también pedir ayuda si sientes que no avanzas es un buen rato.
3. Revisa materiales y videos resolucion de problemas. Hay mucho material en youtube.
4. Mantente hidratado y come alguna fruta cuando resuelvas problemas (o incluso un dulce)
5. Toma descansos programados a la hora de hacer problemas.
6. No faltes a los entrenamientos de olimpiadas de matemáticas.
7. Cuida tu salud y toma precauciones durante la contingencia de COVID