Problemas - Teoría de Números
Dennis Joaquín Díaz Díaz
dennis.diaz@cimat.mx
30 de julio de 2020

1. Problemas

1. Recordemos que $n!$ es el producto de los enteros del 1 al n. Determina el valor de n cuando
$$n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

2. Sean a, b, c, d enteros tales que $a \mid b$ y $c \mid d$. Muestra que $ac \mid bd$.

3. Encuentra todos los números de 3 dígitos abc con $a \neq 0$ tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es un divisor de 26.

4. Sea n un entero. Muestre que $n^2 + 2$ no es divisible entre 4.

5. Sea n un entero. Muestre que $n^3 - n$ es divisible entre 6.

6. Sea n un número natural. Muestre que la fracción
$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$
es irreducible.

7. Muestre que si tomamos 51 números del 1 al 100, hay dos de ellos que tienen máximo común divisor igual a 1.

8. Calcula la suma de los números del 1 al 100.

9. Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ tales que
$$n(n-1) \mid (n-2)!$$

10. Encuentra valores enteros x, y para los cuales se cumpla
$$71x - 50y = 1.$$
¿Es posible encontrar valores enteros a, b tales que se cumpla $8a + 12b = 150$?

11. Demuestra que 7 divide a
$$2222^{5555} + 5555^{2222}.$$

12. Determina la cantidad de números naturales n menores o iguales a 2020 tales que $3^n - n^2$ es múltiplo de 5.

13. Demuestre que si $2^n + 1$ entonces n es una potencia de 2.

14. Sean a, b, c enteros. Muestra que si $a + b + c$ es divisible entre 6, entonces $a^3 + b^3 + c^3$ también es divisible entre 6.