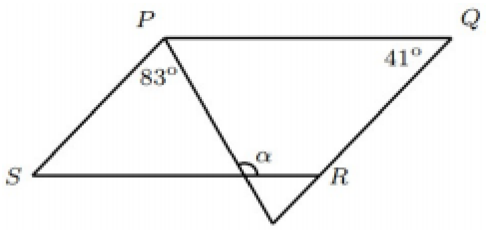
Problema 1. *¿Cuántos números hay tales que el producto de sus dígitos sea 3 y la suma de sus dígitos sea 2020?*

a)2015 b)2016 c)2017 **d)2018** e)2019

Solución Primero notemos que un dígito debe ser igual a 3 y todos los demás deben de ser 1, pues el producto de todos los dígitos es 3. La segunda observación que debemos hacer es que la suma de los dígitos es 2020, por lo que tenemos un 3 y 2017 1's. Con esto, tenemos un total de 2018 dígitos, por lo que podemos crear 2018 números diferentes que cumplan con las condiciones del problema. Así que la respuesta correcta es (d).

Problema 2. *En la figura, $PQRS$ es un paralelogramo. ¿Cuánto vale α?*



(a) 139° (b) 138° **(c)** 124° (d) 98° (e) 97°

Solución Sea A el punto donde se encuentra el ángulo α y sea B la intersección de PA con QR. Dado que PQ es paralela a RS y PS es paralela a QR tenemos que $\angle ARB = \angle PQB = 41°$ y $\angle PBR = \angle SPB = 83°$. Como α es ángulo externo en el triángulo ABR entonces:

$$\alpha = \angle ARB + \angle PBR = 41° + 83° = 124°$$

Por tanto el ángulo buscado es 124°.

Problema 3. *Pablo tiene escritos en el pizarrón los números* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9$ *y esta jugando el siguiente juego. Cada vez Pablo borra dos números a y b y escribe el resultado de $a \times b + a + b$. El juego termina cuando queda sólo un número en el pizarrón. ¿Cuál número quedará al final?*

a) 0 **b) 50399** c) 6479 d) 50400 e)Depende como juegue.

Solución Este problema tiene como objetivo el uso de productos notables. La principal observación (puede hacerse después de varios ejemplos) es que la operación que realiza Pablo se parece a “Sumar uno y multiplicar”, es decir, $(a+1)(b+1)$. En efecto

$$ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1.$$

Cuando se toma $(a+1)(b+1)-1$ y otro número c, al hacer la operación nos da

$$[(a+1)(b+1) - 1 + 1][c+1] - 1 = (a+1)(b+1)(c+1) - 1.$$

Al hacer otra vez la operación, $(a+1)(b+1)(c+1)-1$ con un número d, obtendremos

$$[(a+1)(b+1)(c+1) - 1 + 1][d+1] = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1) - 1$$

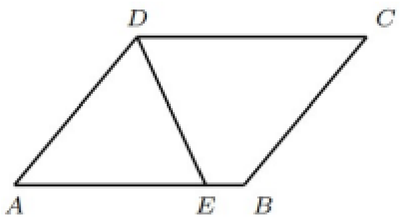
y así continua el patrón.

Se puede demostrar (o convencerse fácilmente de) que NO importa el orden en el que se hayan realizado las operaciones. Siguiendo el patrón la respuesta será

$$(0+1)(1+1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1)(6+1)(9+1) - 1 = 7! \cdot 10 - 1 = 50400 - 1 = 50399.$$

NOTA: Puede ser más fácil de entender el comportamiento del problema sí imaginamos que nos ponemos unos lentes mágicos con los cuales se le suma uno a los números que vemos. En ese caso la operación que realiza Pablo entre dos números es simplemente el producto.

Problema 4. *En la figura $ABCD$ es un paralelogramo y $\angle ADE = \angle EDC$. Sabiendo que $AD = 5$ y $DC = 6$, ¿Cuánto mide EB?*

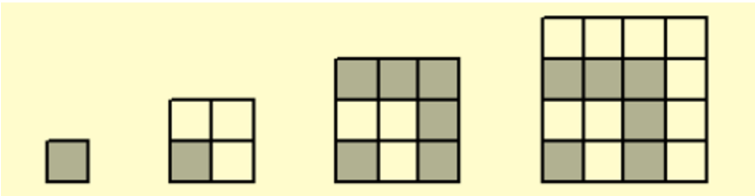


$(a)\ \frac{1}{2}$ $\quad (b)\ \frac{2}{3}$ $\quad (c)\ \frac{3}{4}$ $\quad (d)\ \frac{4}{5}$ $\quad$ **(e) 1**

Solución Como $ABCD$ es paralelogramo entonces $AB = DC = 6$. Por otra parte $\angle AED$ y $\angle EDC$ son ángulos alternos internos por lo que $\angle AED = \angle EDC = \angle ADE$. Esto nos dice que AED es un triángulo isósceles con $AE = AD = 5$. Finalmente, tenemos que $EB = AB - AE = 6 - 5 = 1$.

Problema 5. *Con fichas cuadradas blancas* (B) *y negras* (N) *todas iguales, se arman cuadrados de la siguiente forma:*

- *Un cuadrado* 1×1 *está formado por una ficha* N.
- *Un cuadrado* 2×2 *se forma bordeando el cuadrado* 1×1 *con fichas* B.
- *Un cuadrado* 3×3 *se forma bordeando el cuadrado* 2×2 *con fichas* N.
- *Un cuadrado* 4×4 *se forma bordeando el cuadrado* 3×3 *con fichas* B.
- $\cdots$ *y así sucesivamente.*



Sí se tienen 496 fichas B, *¿cuánto mide el lado del cuadrado más grande que se puede armar siguiendo esta forma?*

a)27 *b*)28 *c*)29 *d*)30 **e) 31**

Solución La primera capa de fichas blancas es la del cuadrado de 2×2, la cual ocupa 3 fichas; la segunda es la del cuadrado de 4×4, la cual ocupa 3+4=7 fichas; la tercera es la del cuadrado de 6×6, la cual ocupa 3+4(2)=11 fichas. De esta forma vemos que los cuadrados ocupados en cada capa forman una progresión aritmética con diferencia 4.
Con esto, debemos encontrar el mayor entero $k \geq 1$ que satisface

$$3 + (3 + 4(1)) + (3 + 4(2)) + \cdots + (3 + 4(k)) \leq 496.$$

Entonces se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
3(k + 1) + 4(1 + 2 + \cdots + k) &\leq 496 \\
3k + 3 + 4\frac{k(k + 1)}{2} &\leq 496 \\
3k + 3 + 2k(k + 1) &\leq 496 \\
2k^2 + 5k + 3 &\leq 496 \\
2k^2 + 5k &\leq 493
\end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que

$$2(14)^2 + 5(14) = 462 \leq 493 < 525 = 2(15)^2 + 5(15).$$

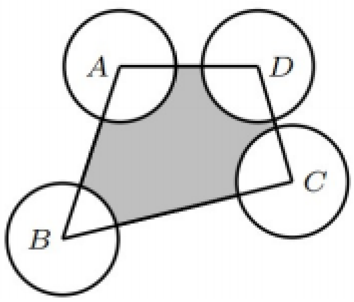
Cuando k es positivo, $2k^2+5k$ es estrictamente creciente, se sigue que el máximo k que buscamos es 14. Ahora bien, como la capa de $3+4(14)$ fichas blancas bordea al cuadrado de lado $2(14+1) = 30$, el lado del cuadrado más grande que ocupa a lo sumo 496 fichas blancas es 31, pues este está bordeado con fichas negras.

Problema 6. *¿Cuántos números de 3 cifras se pueden hacer con los dígitos* $0, 5, 5, 3, 3, 3$*? (Nota:*053 *es de dos cifras)*

a)19 *b*)18 *c*)17 *d*)16 **e)15**

Solución Primero hacemos todos los números que se pueden formar con 0, 3, y 5. Estos son 000, 003, 005, 030, 033, 035, 050, 053, 055, 300, 303, 305, 330, 333, 335, 350, 353, 355, 500, 503, 505, 530, 533, 535, 550, 553, 555. Notemos que los números 000, 003, 005, 030, 033, 035, 050, 053, 055, empiezan con 0, por lo tanto no los vamos a contar, y para 300, 500, 555 no nos alcanzan los números. Por lo tanto en total tenemos los números: 303, 305, 330, 333, 335, 350, 353, 355, 503, 505, 530, 533, 535, 550, 553. Que son 15 números en total.

Problema 7. *En la figura $ABCD$ es un cuadrilátero de área 5. Sí los 4 círculos tienen radio 1 y centro en los vértices del cuadrilátero, ¿cuánto mide el área sombreada?*



(*a*) π (*b*) $\frac{5}{3}$ (*c*) 4 **(d) 5 -** π (*e*) 3π

Solución Trazamos el segmento BD. La suma de los ángulos internos del triángulos ABD con los ángulos internos en el triángulo BDC es la suma de los ángulos internos del cuadrilátero

$ABCD$. Dado que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° entonces la suma de ángulos internos de $ABCD$ es $180° + 180° = 360°$. Esto quiere decir que los sectores de cada circulo dentro del cuadrilátero completan un círculo de radio 1, cuya área es $\pi(1)^2 = \pi$. Dado que el área del cuadrilátero $ABCD$ es 5 entonces el área sombreada es $5 - \pi$.

Problema 8. *El número a es positivo y cumple que el $a\,\%$ de $2a$ es 8. ¿Cuál es el número a?*

a) 10 *b*) 400 **c) 20** *d*) 4 *e*) 2

Solución La principal dificultad del problema es conceptual. Tener el $a\,\%$ de un número es equivalente a multiplicarlo por $\frac{a}{100}$. La condicón del problema nos dice que el $a\,\%$ de $2a$ es 8. Es decir,

$$8 = a\,\%(2a) = \frac{a}{100}(2a) = \frac{a^2}{50}$$

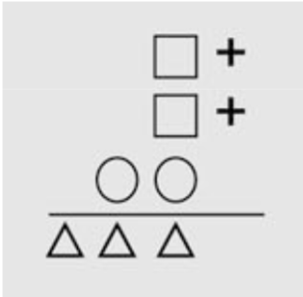
Despejando, $a^2 = 400$. Como a es positivo, entonces la única respuesta es $a = \sqrt{400} = 20$.

Problema 9. *Como todo el mundo sabe los gatos verdes siempre dicen la verdad y los gatos azules siempre dicen mentiras. Una vez en la noche se encontraron 5 gatos, y como no podían verse entre ellos no podían distinguir sus colores así que el primero dijo "Soy verde". El segundo dijo "Al menos 3 de nosotros son morados". El tercero dijo "El primer gato es azul". El cuarto dice, "Al menos 3 de nosotros son azules". Y el quinto dice "todos somos azules". ¿Cuántos gatos son verdes?*

a)0 *b*)1 **c)2** *d*)3 *e*)4

Solución Veamos que el quinto gato es azul, pues sí fuera verde, se contradiría a si mismo. El segundo gato es azul, ya que no hay gatos morados. Sí el tercer gato fuera verde, entonces el primer gato tendría que ser azul, pero sí el tercer gato fuera azul, entonces el primer gato seria verde, así que la cantidad de gatos azules se mantiene. Finalmente para el cuarto gato, veamos que ya tenemos 3 gatos azules, por lo tanto el cuarto gato dice la verdad, así que es verde. Entonces en total tenemos 3 gatos azules. Lo que nos deja un total de 2 gatos verdes.

Problema 10. *Las tres figuras que se muestran a continuación representan dígitos diferentes.*



¿Cuál es el dígito correspondiente al cuadrado?

a)1 *b*)2 *c*)3 *d*)4 *e*)5 **e) 6**

Solución Notemos que $\triangle > 0$, pues entre $\bigcirc\bigcirc$ y $\square$, al menos uno es positivo. Además

$$\bigcirc\bigcirc + \square + \square \leq 99 + 9 + 9 = 117 < 222.$$

Por lo tanto, $0 < \triangle < 2$. Así que $\triangle = 1$.
Sí $\bigcirc \neq 9$, entonces

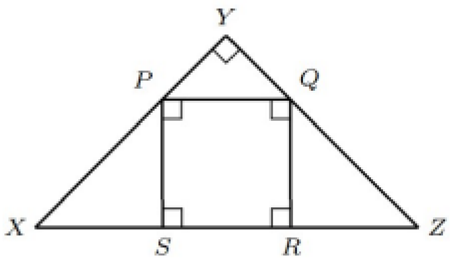
$$111 = \bigcirc\bigcirc + \square + \square \leq 88 + 9 + 9 = 106.$$

Lo cual es absurdo, se sigue que $\bigcirc = 9$. Ahora tenemos que

$$111 = 99 + \square + \square.$$

Por lo tanto, $\square = 6$.

Problema 11. *El diagrama muestra un triángulo rectángulo isósceles XYZ con un cuadrado $PQRS$ en su interior. Sí el área del triángulo XYZ es 1, ¿Cuál es el área del cuadrado $PQRS$?*



(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$ (e) $\frac{2}{3}$

Solución Sea x el área de $PQRS$. Consideramos O el centro de $PQRS$. AL ser XYZ un triángulo rectángulo en Y e isósceles, además de ser PQ paralela a XZ, entonces se cumple $\angle YXZ = \angle YPQ = \angle YQP = \angle YZX = 45°$. En consecuencia $\angle XPS = \angle RQZ = 45°$. De aqui que el área de XPS es igual al área de ZQR y cada una vale $\frac{x}{2}$. Por otra parte, por criterio ALA los triángulos OPQ y YPQ son congruentes por lo que tienen la misma área $\frac{x}{4}$. Como el área de XYZ es 1 se cumple que:

$$\frac{9x}{4} = \frac{x}{4} + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 1$$

Concluimos entonces que el área de $PQRS$ es $\frac{4}{9}$.

Problema 12. *Ale tiene 5 pantalones, 4 blusas, 3 faldas y 3 pares de zapatos. ¿De cuántas formas diferentes se puede vestir sí debe de usar una blusa, un pantalón o falda y un par de zapatos?*

a)180 *b*)15 **c)96** *d*)105 *e*)60

Solución Veamos que Ale tiene 4 blusas, $5 + 3 = 8$ pantalones o blusas y 3 pares de zapatos. Con esto podemos ver que por cada blusa que se ponga Ale, tiene 8 posibles pantalones o faldas, y por cada blusa y pantalón o falda, tiene 3 posibles pares de zapatos para ponerse. Esto es que por cada blusa puede crear 24 diferentes atuendos. Así que en total puede vestirse de 96 maneras diferentes. Por lo que la respuesta correcta es (c)