

Revisión cuarto selectivo

Problema

1

Solución problema 1

La expresión $pqr + p - (pq + pr)$ se puede factorizar de la siguiente manera:

$$pqr + p - (pq + pr) = p(qr + 1 - q - r) = p(q - 1)(r - 1)$$

Por lo que el problema es equivalente a encontrar una infinidad de tercias (p, q, r) para las cuales 2008 divida a $p(q - 1)(r - 1)$. Como $2008 = 8 \times 251$ es la factorización en primos (se debe demostrar que 251 es primo) podemos escoger $p = 251$ y que 8 divida $q - 1$ por ejemplo $q = 17$.

En efecto las ternas $(251, 17, r)$ con r un número primo son infinitas (por la infinidad de primos) y cumplen que 2008 divide a $p(q - 1)(r - 1) = 251 \times 16 \times (r - 1) = 2008 \times 2(r - 1)$.

Criterio problema 1

- Dar la identidad $pqr + p - (pq + pr) = p(q - 1)(r - 1)$
..... **[2 puntos]**
- Factorizar en primos 2008.
..... **[1 punto]**
- Hacer $p = 251$
.....
[1 punto]
- Encontrar una infinidad de parejas de primos (q, r) tal que 8 divida a $(q - 1)(r - 1)$ **[3 puntos]**

- Describir la infinidad de parejas (q, r) **(2 puntos parciales de los tres)**

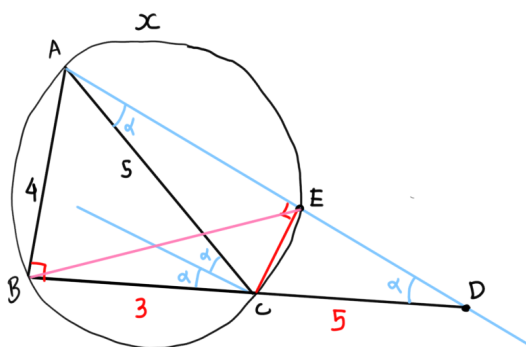
Comentario: Por ejemplo podrían decir que funcionan

$(17, r)$ o (q, r) con q o r congruentes a 1 mod 4. Pero no justificarlo.

- Justificar que las parejas descritas en el punto anterior en efecto son infinitas **(1 punto parcial de los tres)**

Problema

2



Solución problema 2

Supongamos que $\angle BCA = 2\alpha$. Por el paralelismo $\angle ADB = \alpha = \angle CAD$ lo que implica que $5 = AC = CD$ lo que implica que $BC = 3$ lo que implica que el triángulo ABC es rectángulo en B lo que implica que AC es diámetro de X lo que implica que $\angle CEA = 90^\circ$.

Usando el teorema de Pitágoras en ABD conseguimos que $AD = 4\sqrt{5}$.

De aquí hay varias maneras de terminar usando potencia, Ptolomeo, semejanza. De cualquier manera se necesita un teorema. Aquí usaremos que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices en un triángulo rectángulo.

En efecto. Como ACD es isósceles y CE es una altura entonces E es punto medio de la hipotenusa AD por lo que BE mide la mitad de la hipotenusa: $2\sqrt{5}$.

Criterio problema 2

- Demostrar que $AC = CD$ [1 punto]
- Ver que ABC es triángulo rectángulo..... [1 punto]
- Ver $\angle AEC = 90^\circ$ [1 punto]
- Calcular AD [1 punto]
- Calcular BE usando algún teorema [3 puntos]

Comentario: Todo lo anterior a este punto son las cimientos para calcular BE a través de un teorema. Es necesario que se nombre el teorema que se va usar (semejanza, Ptolomeo, potencia, punto medio de hipotenusa) y luego calcular o demostrar lo faltante en el teorema que hayan usado para calcular BE . Por ejemplo si quisieran usar el del punto medio de hipotenusa hay que demostrar que E es punto medio o si usan semejanza deberán demostrar dicha semejanza etc. De esta manera identificamos lo siguientes puntos parciales:

- Establecer el teorema a usar para calcular BE ... (1 punto parcial)
- Completar lo necesario para poder aplicar y calcular BE ... (2 puntos parciales)

Problema 3

Solución problema 3

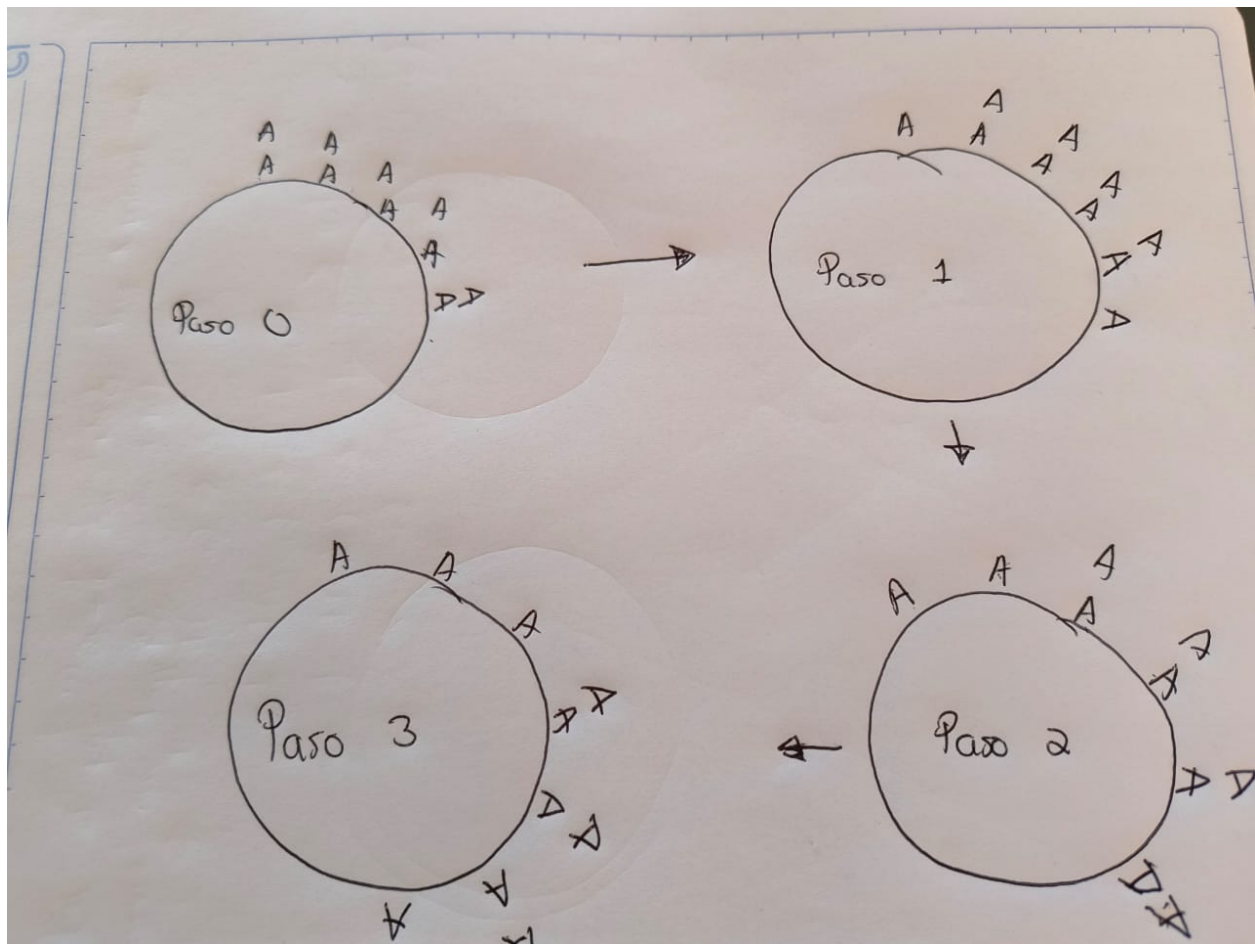
Notemos que las n tarjetas que deben quedar fijas son las del $n + 1$ al $2n$.

Reformularemos el problema. En lugar de considerar $2n$ tarjetas distintas lo que haremos será "etiquetarlas" con una A si son del $n + 1$ al $2n$ y con una B si son del 1 al n . De esta manera cada persona tiene siempre dos tarjetas y hace lo siguiente:

- Si tiene dos del mismo tipo, pasa una de dicho tipo
- Si tiene una de cada tipo para la tipo B

El problema es equivalente a ver que se llega al acomodo donde cada persona tiene una A y una B y de esta manera ya siempre solo se moverán las B . Hay dos casos dependiendo de la paridad de n . Haremos el caso en que $n = 2m$ es par. El caso en el que es impar se hace de manera análoga.

La siguiente imagen de como se mueven para $n = 10$ es esclarecedora. Aquí cada persona tiene dos tarjetas, los espacios vacíos pueden ser rellenados con B pero solo nos importa la dinámica de las A por lo que solo las observamos a ellas.



Esta imagen muestra que cada dos pasos una persona nueva adquiere una tarjeta A . Por lo que en el paso $2k - 1$ se puede conseguir que $m + k$ personas tengan una tarjeta A . Como queremos que $m + k = n = 2m$ entonces $k = m$ por lo que son necesarios $2m - 1 = n - 1$ pasos. Para n impar la respuesta es $n - 2$.

Criterio

- Las tarjetas que no se mueven son las mayores. **(1 punto)**
- Considerar tarjetas tipo A y tipo B y reformular el problema en términos de estas. **(2 puntos)**
- Hacer diagramas de la dinámica de las mayores (tipo A) **(1 puntos)**
- Observar que cada dos pasos una nueva persona adquiere un tarjeta tipo A (y las demás que ya tenían, conservan una) **(2 puntos)**
- Dar las respuestas para n par y e impar. **(1 puntos)**